Übungsblatt 2

Hinweis: Die Aufgaben auf diesem Übungsblatt sind etwas umfangreicher. Daher gibt es dieses Mal nur zwei Aufgaben.

Aufgabe 1. (6 Punkte) Sei p eine Primzahl, und seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $p \mid a \cdot b$. Wie wir in den Beispielen 1.2.9 und 1.2.10 gesehen haben, kann man mit Hilfe des Verfahrens aus dem Fundamentallemma (1.2.6) dann $p \mid a$ oder $p \mid b$ erhalten. In den beiden Beispielen war jedoch schon im voraus klar, ob wir $p \mid a$ oder $p \mid b$ zeigen würden, weil wir die Beispiele gerade so konstruiert hatten, dass $p \nmid b$ oder $p \nmid a$ galt.

Es kann natürlich auch vorkommen, dass sowohl $p \mid a$ als auch $p \mid b$ gilt. Gibt es eine Regel, in welchem der beiden Faktoren a oder b man mit Hilfe des Verfahrens aus dem Fundamentallemma in so einem Fall das p als Primfaktor findet? Falls ja: Wie lautet die Regel, und warum? Falls nein: Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass beides möglich ist!

Aufgabe 2. (6 Punkte) Sei $M := \{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Zeigen Sie, dass die Menge M *multiplikativ abgeschlossen* ist, dass also für alle $a, b \in M$ auch $a \cdot b \in M$ gilt.

Wir nennen eine Zahl $m \in M$ *unzerlegbar*, wenn aus $m = a \cdot b$ mit $a, b \in M$ immer folgt: $a = 1$ oder $b = 1$.

Finden Sie eine Zahl $k \in M$, für die es zwei echt unterschiedliche Darstellungen $k = m_1 \cdot m_2$ und $k = m'_1 \cdot m'_2$ mit unzerlegbaren $m_1, m_2, m'_1, m'_2 \in M$ gibt! (Dabei nennen wir die beiden Darstellungen von k *echt unterschiedlich*, wenn $m_i \neq m'_j$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$ gilt.)

(*Achtung:* Bei der Lösung der Aufgabe ist natürlich insbesondere nachzurechnen, dass die Zahlen m_1, m_2, m'_1 und m'_2 in den gefundenen Produktdarstellungen der Zahl k unzerlegbar sind.)

Späteste Abgabe: Fr, 30.4.2010, 12.00 Uhr

Angela Holtmann