Übungsblatt 6

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden größten gemeinsamen Teiler mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus:

- $\mathrm{ggT}(8, 12)$
- $\mathrm{ggT}(4, 12)$
- $\mathrm{ggT}(75, 625)$
- $\mathrm{ggT}(576, 484)$
- $\mathrm{ggT}(1428, 333)$
- $\mathrm{ggT}(30031, 2036)$
- $\mathrm{ggT}(247, 299)$
- $\mathrm{ggT}(2^{2^5} + 1, 641)$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Wir sagen, dass $v \in \mathbb{Z}$ ein *kleinstes gemeinsames Vielfaches* von a und b ist, falls:

1. $v \geq 0$, $a \mid v$ und $b \mid v$, und
2. für jedes gemeinsame Vielfache u von a und b gilt: $v \mid u$.

Dabei heißt u ein *gemeinsames Vielfaches von a und b*, falls $a \mid u$ und $b \mid u$ gilt.

- Zeigen Sie, dass es zu $a, b \in \mathbb{Z}$ höchstens ein kleinstes gemeinsames Vielfaches geben kann!
- Zeigen Sie, dass es zu $a, b \in \mathbb{Z}$ immer ein kleinstes gemeinsames Vielfaches gibt!

(*Hinweis:* Schauen Sie sich die Beweise zu den Sätzen 1.4.2 und 1.4.4 an!)

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Bei Lemma 1.4.5 haben wir zu einer ganzen Zahl a und einer natürlichen Zahl b eine Menge $M = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es gibt ein } z \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = a - zb\}$ definiert, aus der wir den Rest r, $0 \leq r < b$, bestimmt haben, der sich bei der Division von a durch b ergibt. (Das war gerade das kleinste Element in der Menge M.)

Bestimmen Sie nun die Menge $\{x \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es gibt ein } z \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 12 - 8z,\ 0 \leq x \leq 40\}$! (Das sind gerade die kleinsten Elemente aus der Menge M für die Zahlen 12 und 8.)

Schreiben Sie die Zahl 12 auf fünf verschiedene Weisen als $12 = 8q_i + r_i$ mit $q_i, r_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, 5$, (so dass also $(q_i, r_i) \neq (q_j, r_j)$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit $i \neq j$ gilt)!

Späteste Abgabe: Fr, 4.6.2010, 10.00 Uhr

Angela Holtmann