Übungsblatt 7

Aufgabe 1. (4 Punkte)

- Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten die Menge

  $I := I(a_1, \ldots, a_n) := \{z \in \mathbb{Z} \mid \text{es gibt } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z} \text{ mit } z = x_1 \cdot a_1 + \ldots + x_n \cdot a_n\}.$

  Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

  - Sind $z, z' \in I$, so ist auch $z - z' \in I$.
  - Ist $z \in I$ und $x \in \mathbb{Z}$, so ist auch $x \cdot z \in I$.

- Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ und zwei Darstellungen $a = q_1 \cdot b + r_1$ und $a = q_2 \cdot b + r_2$ mit $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ gegeben. Zeigen Sie, dass dann $b \mid r_1 - r_2$ gilt! (Die „Reste“ unterscheiden sich also um ein Vielfaches von b.)

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Geben Sie zu den folgenden Gleichungen jeweils eine ganzzahlige Lösung an (d. h. eine Lösung mit $x, y \in \mathbb{Z}$) bzw. eine Begründung, warum es keine ganzzahlige Lösung geben kann!

$$27x - 3y = 9$$
$$221x - 247y = 91$$
$$15x - 46y = 1$$
$$15x + 25y = 7$$
$$13x - 17y = 36$$
$$509x + 30031y = 1018$$
$$30031x - 509y = 1$$
$$256x + 128y = 16$$

Aufgabe 3. (4 Punkte)

- Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a + c \cdot b, b)$ gilt!
- Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Gegeben sei eine ganzzahlige Lösung (x_0, y_0) der Gleichung

  $$ax + by = c$$

  (in den Variablen x und y). (Es soll also gelten: $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ und $ax_0 + by_0 = c$.)
  Zeigen Sie, dass dann auch $\left(x_0 + \frac{kb}{\mathrm{ggT}(a,b)},\ y_0 - \frac{ka}{\mathrm{ggT}(a,b)}\right)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ Lösungen der Gleichung sind!
  Berechnen Sie hiermit drei ganzzahlige Lösungen für die Gleichung

  $$15x - 3y = 3.$$

Späteste Abgabe: Fr, 11.6.2010, 12.00 Uhr

Angela Holtmann