Übungsblatt 8

Aufgabe 1. (4 Punkte)

In der folgenden Liste sind jeweils die größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen gegeben. Stellen Sie diese als ganzzahlige Linearkombination der beiden natürlichen Zahlen dar!

- $\mathrm{ggT}(8, 12)$
- $\mathrm{ggT}(4, 12)$
- $\mathrm{ggT}(75, 625)$
- $\mathrm{ggT}(576, 484)$
- $\mathrm{ggT}(1428, 333)$
- $\mathrm{ggT}(30031, 2036)$
- $\mathrm{ggT}(247, 299)$
- $\mathrm{ggT}(2^{2^5} + 1, 641)$

Aufgabe 2. (8 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) \neq 0$.

In Aufgabe 3 auf Übungsblatt 6 haben wir gesehen, dass mit jeder ganzzahligen Lösung (x_0, y_0) der Gleichung

$$ax + by = c$$

(in den Variablen x und y) auch $\left(x_0 + \frac{kb}{\mathrm{ggT}(a,b)}, y_0 - \frac{ka}{\mathrm{ggT}(a,b)}\right)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine Lösung der Gleichung ist.

Zeigen Sie, dass alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $ax + by = c$ von dieser Form sind!

Hier eine Anleitung zum Beweis – auszuführen sind nun die einzelnen Beweisschritte, die Ideen sind bereits vorgegeben:

- Wir wissen bereits (nach dem Hauptsatz über den größten gemeinsamen Teiler, also Satz 1.4.17), dass die Gleichung $ax + by = c$ genau dann eine Lösung hat, wenn c ein Vielfaches des $\mathrm{ggT}(a, b)$ ist. Natürlich sind auch a und b Vielfache von $\mathrm{ggT}(a, b)$.
  Zeigen Sie zunächst, dass die Gleichungen $ax + by = c$ und $a'x + b'y = c'$ (in den Variablen x und y) die gleichen Lösungsmengen haben, wenn wir $a' := a/\mathrm{ggT}(a, b)$, $b' := b/\mathrm{ggT}(a, b)$ und $c' := c/\mathrm{ggT}(a, b)$ setzen!
- Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(a', b') = 1$ ist, wenn wir a' und b' wie oben wählen!

Späteste Abgabe: Fr, 18.6.2010, 12.00 Uhr

Angela Holtmann

- Nutzen Sie nun aus, dass je zwei Lösungen (x_0, y_0) und (x_1, y_1) der Gleichung
$$ax + by = c$$
auch Lösungen der Gleichung
$$a'x + b'y = c'$$
sind! Bringen Sie nun durch geschickte Rechenoperationen x_0 und x_1 auf die eine Seite der Gleichung und y_0 und y_1 auf die andere Seite der Gleichung!
- Betrachten Sie die Primfaktorzerlegungen der so entstandenen linken und der rechten Seite der Gleichung, und zeigen Sie damit, dass $a' \mid y_0 - y_1$ sowie $b' \mid x_0 - x_1$ gilt!
- Folgern Sie daraus, dass es $s, t \in \mathbb{Z}$ gibt mit $x_1 = x_0 + s \cdot b/\mathrm{ggT}(a, b)$ sowie $y_1 = y_0 + t \cdot a/\mathrm{ggT}(a, b)$.
- Zeigen Sie zum Schluss (z.B. durch Einsetzen der beiden Lösungen (x_0, y_0) und (x_1, y_1) in die Gleichung $ax + by = c$), dass dann $t = -s$ gelten muss!