Übungsblatt 3

Aufgabe 1. ($2 + 2$ Punkte)

- Berechnen Sie das Produkt aller positiven Teiler der folgenden Zahlen: 5, 27, 1024, 30031. (Wer mag, kann auch das Produkt aller positiven Teiler von 44200 berechnen. Ein Computer-Algebra-System wäre dazu aber sicherlich hilfreich.)
- Berechnen Sie die Summe aller positiven Teiler der folgenden Zahlen: 5, 27, 1024, 30031, 44200.

- Zeigen Sie: Ist eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, *keine* Primzahl, so gibt es einen Primteiler m von n mit $m \leq \sqrt{n}$. (Hierbei bezeichnet $\sqrt{n}$ die eindeutig bestimmte positive Zahl $k \in \mathbb{R}$ mit $k^2 = n$.)

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Eine natürliche Zahl a heißt *quadratfrei*, wenn gilt: Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 \mid a$, so ist $n = 1$.

Zeigen Sie:

$a \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$, ist genau dann quadratfrei, wenn in der Primfaktorzerlegung $a = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$ mit $p_1 < \ldots < p_k$ Primzahlen und $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ alle Exponenten m_i, $i = 1, \ldots, k$, gleich 1 sind.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

- Erstellen Sie eine Liste mit allen Primzahlen im Bereich von 1 bis 100.
- Eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ heißt *vollkommen*, wenn die Summe all ihrer positiven Teiler doppelt so groß ist wie sie selbst, wenn also $\sigma(a) = 2a$ gilt.

  Gerade (= durch 2 teilbare) vollkommene Zahlen kann man charakterisieren als die Zahlen von der Form $2^{s-1} \cdot (2^s - 1)$ mit $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$, wobei hierbei allerdings vorausgesetzt werden muss, dass $2^s - 1$ eine *Primzahl* ist.[1]

  Berechnen Sie nun die fünfzehn Zahlen $2^{s-1} \cdot (2^s - 1)$, $s = 2, \ldots, 16$, und testen Sie, welche der Zahlen vollkommen sind!

  (Für den Test dürfen Sie auch das Ergebnis aus dem letzten Teil der Aufgabe 1 auf diesem Übungsblatt benutzen.)

[1] Das ist nicht immer der Fall, wie wir später noch sehen werden.

Späteste Abgabe: Fr, 6.5.2011, 12.00 Uhr Angela Holtmann