Übungsblatt 9

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass für $a, b, c \in R$ folgende Aussagen gelten:

- $a \sim a$ für alle $a \in R$.
- Gilt $a \sim b$, so auch $b \sim a$.
- Gilt $a \sim b$ und $b \sim c$, so auch $a \sim c$.
- Sei $a \sim b$. Dann ist $a \mid c$ genau dann, wenn $b \mid c$.
- $a \sim b$ genau dann, wenn es eine Einheit $f \in R$ gibt mit $b = af$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei R ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit additiv neutralem Element n und einer Normfunktion N, und seien $a, b \in R$. Zeigen Sie, dass dann Folgendes gilt:

- Ist $b \neq n$ und $a \mid b$, so ist auch $N(a) \mid N(b)$ und $1 \leq N(a) \leq N(b)$.
- Sind a und b assoziiert, so ist $N(a) = N(b)$.
- Ist $f \in R$ eine Einheit, so ist $N(f) = 1$.
- Ist die Normfunktion N zusätzlich monoton, so ist $f \in R$ genau dann eine Einheit, wenn $N(f) = 1$ ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Wir betrachten den quadratischen Zahlbereich $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ mit der in der Vorlesung angegebenen „zugehörigen" Normfunktion $N : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{N}_0$.

- Berechnen Sie die folgenden Normen der Elemente in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$:

$$N((2,0)), \quad N((3,0)), \quad N((6,0)), \quad N((1,1)), \quad N((1,-1))$$

- Zeigen Sie, dass in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ Folgendes gilt:

$$(2,0) \nmid (1,1), \quad (2,0) \nmid (1,-1), \quad (2,0) \mid (6,0), \quad (1,1) \mid (6,0)$$

- Bestimmen Sie alle Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$!

Späteste Abgabe: Fr, 1.7.2011, 12.00 Uhr

Angela Holtmann