Übungsblatt 2

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Benutzen Sie die Gruppentafel für die Symmetriegruppe $S_\triangle$ eines regelmäßigen Dreiecks und die Definition einer Untergruppe, um Folgendes zu zeigen bzw. folgende Fragen zu beantworten:

- Die Menge der Drehungen des Dreiecks um seinen Mittelpunkt, die es wieder auf sich selbst abbilden, ist eine Untergruppe von $S_\triangle$.
- Jede Spiegelung des Dreiecks bildet zusammen mit der Identitätsabbildung eine Untergruppe von $S_\triangle$.
- Enthält eine Untergruppe H der Symmetriegruppe $S_\triangle$ zwei verschiedene Spiegelungen, so ist $H = S_\triangle$.
- Gibt es eine weitere Untergruppe der Symmetriegruppe $S_\triangle$? Warum bzw. warum nicht?

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Gegeben sei die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ der reellen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung und die Gruppe $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ der positiven reellen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung.[1]

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto 2^x$$

ein Gruppenhomomorphismus ist! (Sie dürfen dazu die üblichen Rechenregeln für die reellen Zahlen verwenden.)

Bestimmen Sie den Kern von f!

Aufgabe 3 (Kleinsche Vierergruppe). (4 Punkte)

Gegeben sei die Menge $M := \{a, b, c, d\}$ mit folgender Verknüpfung $*$:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Zeigen Sie, dass es sich bei der Menge M mit der Verknüpfung $*$ um eine abelsche Gruppe handelt! (Insbesondere ist hierbei das neutrale Element zu bestimmen und zu jedem Element sein Inverses.)

[1] Sie dürfen für diese Aufgabe annehmen, dass das beides Gruppen sind; alternativ können Sie sich natürlich durch Nachrechnen davon überzeugen...