Übungsblatt 8

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Mit $\mathbb{C}$ bezeichnen wir die komplexen Zahlen:

Als Menge bestehen sie aus den Ausdrücken der Form $z = x + i \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, und Addition und Multiplikation sind wie folgt gegeben:

$$+ \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) := (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$$

und

$$\cdot \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) := (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2).$$

Bestimmen Sie die neutralen Elemente der Addition und der Multiplikation und zu jedem $x+i\cdot y$ sein additiv Inverses, was wir mit $-(x+i\cdot y)$ bezeichnen, und zu jedem $x+i\cdot y \neq 0+i\cdot 0$ sein multiplikativ Inverses, was wir mit $(x + i \cdot y)^{-1}$ bezeichnen!

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Wir identifizieren jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit dem Ausdruck $x + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$.

Zeigen Sie, dass die Einschränkung der Addition und der Multiplikation auf $\mathbb{C}$ auf die Zahlen der Form $x + i \cdot 0$ der Addition und der Multiplikation in $\mathbb{R}$ entspricht, dass also gilt:

$$(x_1 + i \cdot 0) + (x_2 + i \cdot 0) := (x_1 + x_2) + i \cdot 0$$

und

$$(x_1 + i \cdot 0) \cdot (x_2 + i \cdot 0) = (x_1 \cdot x_2) + i \cdot 0$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$!

Berechnen Sie folgende Ausdrücke in $\mathbb{C}$:

$$3 \cdot (4 + i \cdot 5), \quad (-1 + i \cdot 4) \cdot 7, \quad (3 + i \cdot 5) + (4 + i \cdot (-5)), \quad (4 + i \cdot 2) + (3 + i \cdot (-3)),$$

$$-(4 + i \cdot (-3)), \quad (2 + i \cdot 0)^{-1}, \quad (0 + i \cdot 4)^{-1} \text{ und } (2 + i \cdot 1)^{-1}.$$

(Bitte wenden!)

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Für eine komplexe Zahl $z = x + i \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ nennen wir x den *Realteil von* z und y den *Imaginärteil von* z. Wir schreiben $x = \mathrm{Re}\, z$ und $y = \mathrm{Im}\, z$.

Wir definieren die *obere Halbebene* $\mathbb{H}^2$ von $\mathbb{C}$ durch

$$\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}.$$

Für eine komplexe Zahl $x + i \cdot y$ ist ihr *Betrag* $|x + i \cdot y|$ gegeben durch

$$|x + i \cdot y| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ fest, so dass $ad - bc \neq 0$ ist, und wir definieren $M \subseteq \mathbb{C}$ durch

$$M := \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{falls } c = 0 \\ \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}, & \text{falls } c \neq 0 \end{cases}$$

Mit diesen Daten betrachten wir nun folgende Funktion:

$$f \colon M \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

[1]

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\mathrm{Im}\ f(z) = \frac{\mathrm{Im}\ z}{|cz + d|^2}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung f die obere Halbebene in sich abbildet!

[1] Die Definition von M sorgt – zusammen mit der Festlegung, dass $ad - bc \neq 0$ sein soll, – gerade dafür, dass der Ausdruck $cz + d$, der bei der Funktion f im Nenner des Funktionswertes auftritt niemals Null wird, der Wertebereich von f also wirklich in $\mathbb{C}$ liegt.