Bem. 3.5

Die Definition von „zwischen" in $\mathcal{Z}_1$ ist äquivalent zu folgender Definition:

$$\mathcal{Z}_1 := \left\{ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \in E \times E \times E \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 = x_2 = x_3, \quad y_1 < y_2 < y_3 \text{ oder} \\ \qquad\qquad\qquad y_3 < y_2 < y_1 \end{array} \right\}$$

Beweis

Übung!

[Mit der Definition von „zwischen" können wir auch nachrechnen, dass die Lageaxiome ((L1), (L2), (L3), (L4a), (L4b)) gelten.]

Satz 3.6

E, $\mathcal{G}$, $\mathcal{Z}$ wie oben. Dann gelten (L1) bis (L4b).

Beweis

Übung!

[Für die Kongruenzaxiome müssten wir nun zunächst definieren, was Strecken und Winkel sind und was Längen von Strecken und Maße von Winkeln sind.]

[Eine Methode ist, direkt die Längen von Strecken und ~~Winkeln~~ Maße von Winkeln anzugeben, worauf wir (evtl.) später noch zurückkommen.]

Wir machen nun Folgendes:
Wir betrachten gewisse bijektive Abbildungen der oberen Halbebene $\mathbb{E}$ in sich, die Geraden aus $\mathcal{G}$ auf Geraden aus $\mathcal{G}$ überführen. (und definieren so die Kongruenz von Strecken und Winkeln).

<u>Def. 3.7</u>

$(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ mit $ad-bc \neq 0$, so nennen wir die folgenden Abbildungen <u>gebrochen-linear</u> (oder <u>Möbius-Transformationen</u>):

$\underline{\underline{c \neq 0}}$:
$$\varphi_{a,b,c,d}: \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{-d}{c}\right\} \to \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

$\underline{\underline{c = 0}}$:
$$\varphi_{a,b,0,d}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

<u>Bem. 3.8</u>
Die Bedingung $ad-bc \neq 0$ stellt sicher, dass nicht d und c gleichzeitig Null sein können.
Wir erhalten also wirklich eine Abbildung nach $\mathbb{C}$.

<u>Bsp. 3.9</u>
- Falls $(a,b,c,d) = (1,b,0,1)$ ist, so ist $\varphi_{a,b,c,d}$ die <u>Translation um</u> b:

$$\varphi_{a,b,c,d} = \varphi_{1,b,0,1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}$$
$$= \frac{z}{1} + \frac{b}{1} = z + b$$

- Falls $(a,b,c,d) = (\lambda, 0, 0, \frac{1}{\lambda})$ mit $\lambda \neq 0$ ist, so ist $\varphi_{a,b,c,d}$ die Streckung um den Faktor λ^2 (ausgehend vom Ursprung):

$$\varphi_{a,b,c,d} = \varphi_{\lambda,0,0,\frac{1}{\lambda}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{\lambda \cdot z + 0}{0 \cdot z + \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda \cdot z}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \lambda^2 z$$

- Falls $(a,b,c,d) = (0,1,1,0)$ ist, so ist $\varphi_{a,b,c,d}$ die „Kehrwertbildung":

$$\varphi_{a,b,c,d}(z) = \varphi_{0,1,1,0}(z) = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0} = \frac{1}{z}$$
$$(\varphi_{0,1,1,0} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C})$$

[Wir betrachten nun die Hintereinanderschaltungen von gebrochen-linearen Transformationen]

Satz B 10

- Sind $(a,b,c,d), (a',b',c',d') \in \mathbb{C}^4$ mit $ad - bc \neq 0 \neq a'd' - b'c'$, so gilt:

$$\varphi_{a,b,c,d} \circ \varphi_{a',b',c',d'}$$
$$= \varphi_{aa'+bc',\, ab'+bd',\, ca'+dc',\, cb'+dd'}$$

falls beide Seiten definiert sind.

• Ist $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ mit $ad-bc \neq 0$, so gilt:

<u>$c \neq 0$</u>: $\varphi_{a,b,c,d} : \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ ist bijektiv.

<u>$c = 0$</u>: $\varphi_{a,b,0,d} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist bijektiv.

Die zugehörige Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\varphi_{\frac{d}{ad-bc}, \frac{-b}{ad-bc}, \frac{-c}{ad-bc}, \frac{a}{ad-bc}}.$$

<u>Beweis</u>

• $\varphi_{a,b,c,d} \circ \varphi_{a',b',c',d'}(z)$

$$= \frac{a \cdot \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \cdot \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d}$$

$$= \frac{\left(\frac{aa'z + ab' + bc'z + bd'}{c'z+d'}\right)}{\left(\frac{ca'z + cb' + dc'z + dd'}{c'z+d'}\right)}$$

$$= \frac{(aa'+bc')z + (ab'+bd')}{(ca'+dc')z + (cb'+dd')}$$

$= \varphi_{aa'+bc',\ ab'+bd',\ ca'+dc',\ cb'+dd'}$.

- [Wir müssen nun zeigen, dass sich als Hintereinanderschaltung der beiden Abbildungen jeweils die Identität ergibt. Das machen wir mit Hilfe des ersten Teils des Satzes.]

[Bem. Die Identität auf $\mathbb{C}$ ist gegeben durch die Abbildung

$$\varphi_{1,0,0,1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} = \frac{z}{1} = z.]$$

$$\varphi_{\frac{d}{ad-bc},\ \frac{-b}{ad-bc},\ \frac{-c}{ad-bc},\ \frac{a}{ad-bc}} \circ \varphi_{a,b,c,d}$$

$$= \varphi_{\frac{d}{ad-bc}\cdot a + \frac{-b}{ad-bc}\cdot c,\ \frac{d}{ad-bc}\cdot b + \frac{-b}{ad-bc}\cdot d,\ \frac{-c}{ad-bc}\cdot a + \frac{a}{ad-bc}\cdot c,\ \frac{-c}{ad-bc}\cdot b + \frac{a}{ad-bc}\cdot d}$$

$$= \varphi_{\frac{da-bc}{ad-bc},\ \frac{db-bd}{ad-bc},\ \frac{-ca+ac}{ad-bc},\ \frac{-cb+ad}{ad-bc}}$$

$$= \varphi_{1,0,0,1}$$

$$\varphi_{a,b,c,d} \circ \varphi_{\frac{d}{ad-bc},\ \frac{-b}{ad-bc},\ \frac{-c}{ad-bc},\ \frac{a}{ad-bc}}$$

$$= \varphi_{a\cdot\frac{d}{ad-bc} + b\cdot\frac{-c}{ad-bc},\ a\cdot\frac{-b}{ad-bc} + b\cdot\frac{a}{ad-bc},\ c\cdot\frac{d}{ad-bc} + d\cdot\frac{-c}{ad-bc},\ c\cdot\frac{-b}{ad-bc} + d\cdot\frac{a}{ac-bc}}$$

$$= \varphi_{\frac{ad+b\cdot(-c)}{ad-bc},\ \frac{a\cdot(-b)+b\cdot a}{ad-bc},\ \frac{cd+d\cdot(-c)}{ad-bc},\ \frac{c\cdot(-b)+d\cdot a}{ad-bc}}$$

$$= \varphi_{1,0,0,1}$$

Wir müssen noch zeigen:
Im Fall $c \neq 0$ liegt $\frac{a}{c}$ nicht im Bild von $\varphi_{a,b,c,d}$ und $\frac{-d}{c}$ nicht im Bild von $\varphi_{\frac{d}{ad-bc}, \frac{-b}{ad-bc}, \frac{-c}{ad-bc}, \frac{a}{ad-bc}}$

Angenommen, es gäbe ein $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$ mit

$$\varphi_{a,b,c,d}(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}.$$

Dann wäre

$$(az+b) \cdot c = a \cdot (cz+d)$$

$$\overset{\shortparallel}{acz+bc} \qquad \overset{\shortparallel}{acz+ad},$$

also:

$$bc = ad,$$

also $ad - bc = 0$ ↯ (Widerspruch! N.V. war $ad-bc \neq 0$)

Entsprechend:
Angenommen, es gäbe ein $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ mit $\varphi_{\frac{d}{ad-bc}, \frac{-b}{ad-bc}, \frac{-c}{ad-bc}, \frac{a}{ad-bc}}(z)$

$$= \frac{\frac{d}{ad-bc} z + \frac{-b}{ad-bc}}{\frac{-c}{ad-bc} z + \frac{a}{ad-bc}} = \frac{-d}{c}$$

Dann wäre [Erweitern der linken Seite mit $ad-bc$!]:

$$\frac{d\cdot z \; - b}{-c\cdot z \; + a} = \frac{-d}{c}$$

Also:

$$(d\cdot z - b)\cdot c = -d\cdot(-cz + a)$$

$$cdz - bc \qquad cdz - da,$$

also:

$$bc = da,$$

also: $ad - bc = 0$ ↯ (Widerspruch!)

$\square$