Übersicht zur Vorlesung „Ausgewählte Kapitel der Geometrie“

Stand: 19.1.2012

Definitionen/Axiome

- Anordnungsaxiome
- Archimedisches Axiom
- Definition von „größer“ in den reellen Zahlen
- Intervalle
- Punkte, Geraden
- Spezialfall von Punkten und Geraden im $\mathbb{R}^2$
- Inzidenzaxiome
- bijektive Abbildung
- Koordinatensystem
- Messlattenaxiom
- Betragsfunktion
- Abstandsfunktion
- Euklidischer Abstand
- Isometrie
- Addition im $\mathbb{R}^2$
- Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^2$
- 2×2-Matrix, zugehörige Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- Produkt von Matrizen
- Translation
- Drehungen um den Nullpunkt, Beschreibung als Matrizen
- Determinante von 2×2-Matrizen
- Definition von „zwischen“ (über die Abstandsfunktion von Geraden)

- Strecken, Strahlen, Endpunkte, entgegengesetzter Strahl
- Kongruenz von Strecken
- Ebenentrennungsaxiom
- konvexe Mengen
- Winkel, Winkelmaßfunktion
- Inneres eines Winkels
- sich ergänzende Winkel
- Kongruenz von Winkeln
- Winkelmaß für $\mathbb{R}^2$
- Skalarprodukt
- Winkeltreue
- Dreiecke
- Reihenfolgen-Kongruenz von Dreiecken
- Kongruenz von Dreiecken
- SWS-Axiom
- Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke
- Gegenüberliegender Winkel
- äußerer Winkel und entfernte Innenwinkel
- Parallelität von Geraden
- Wechselwinkel
- Parallelenaxiom
- Drehungen, Spiegelungen, Translationen im $\mathbb{R}^2$ (explizite Beschreibung)
- Gruppe
- Untergruppe

Aussagen, Sätze, Beispiele, Rechnungen

- Rechnungen zur Größer-Relation
- Vollständigkeit der reellen Zahlen, Satz von Bolzano-Weierstraß (nur Aussage)
- Beispiele dazu
- Beschreibung von Geraden durch drei Parameter, wann sind zwei Geraden gleich?
- Nachrechnen, dass die Inzidenzaxiome mit den im $\mathbb{R}^2$ gegebenen Geraden gelten
- Eigenschaften der Abstandsfunktion nachrechnen
- Vergleich euklidischer Abstand und Abstand, der durch ein Koordinatensystem für eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ gegeben ist
- Eigenschaften von Abbildungen nachrechnen, die durch 2×2-Matrizen gegeben sind (Addition und Skalarmultiplikation)
- Hintereinanderschaltung von Abbildungen ist „kompatibel" mit Matrizenmultiplikation
- Nachrechnen, dass Translationen Isometrien sind
- Zeigen, wann die Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^2$ eine Isometrie ist
- Charakterisierung von Isometrien (Satz 3.16)
- Beispiele und Gegenbeispiele zu Isometrien
- Hintereinanderschaltung von Drehungen um den Nullpunkt entspricht der Addition der Winkel
- Matrizen zu Umkehrabbildungen bestimmen können
- Bestimmung von Matrizen zu Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- Umkehrabbildungen zu Isometrien sind Isometrien
- Zeigen, dass die Determinante einer Isometrie betragsmäßig 1 sein muss
- Geraden durch den Nullpunkt werden von Abbildungen, die durch Matrizen gegeben sind, auf Gerade durch den Nullpunkt oder $(0, 0)$ abgebildet.
- Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt.
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung
- Zusammenhang vom Skalarprodukt mit Streckenlängen

- Nachrechnen können, ob eine Menge konvex ist, Darstellung von Punkten auf der Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten (s. Anhang)
- Basiswinkelsatz
- WSW-Kongruenzsatz
- SSS-Kongruenzsatz (ohne Beweis)
- Existenz einer Geraden, die senkrecht auf einer anderen steht und durch einen vorgegebenen Punkt geht (incl. Konstruktionsverfahren)
- Dreiecksungleichung (nur Aussage)
- Satz über äußere Winkel (nur Aussage)
- Satz über den Vergleich von Streckenlängen mit Winkelmaßen der jeweils gegenüberliegenden Winkel (nur Aussage)
- SsW-Kongruenzsatz
- Zwei Geraden sind parallel, wenn es eine dritte Gerade gibt, die auf beiden senkrecht steht.
- Existenz paralleler Geraden zu einer vorgegebenen Gerade und einem Punkt
- Zusammenhang von Parallelität und Winkelmaßen von Wechselwinkeln (Satz 7.5, Satz 7.6)
- Charakterisierung der Parallelität von Geraden (Satz 7.7)
- Die Summe der Winkelmaße der Innenwinkel beträgt 180.
- Isometrien erhalten Winkelmaße.
- Isometrien bilden Punkte auf einer vorgegebenen Geraden wieder auf sich ab, falls zwei Punkte der Gerade festgelassen werden. (nur Aussage)
- Eine Isometrie, die drei Punkte festlässt, die nicht auf einer Geraden liegen, ist die Identität.
- Bijektivität von Translationen, Drehungen und Spiegelungen im $\mathbb{R}^2$
- Jede Isometrie im $\mathbb{R}^2$ ist bijektiv (hier insbesondere: explizite Darstellung als Hintereinanderschaltung von Translationen, Drehungen und ggf. Spiegelungen an der x-Achse)
- Sind zwei Dreiecke reihenfolgen-kongruent, so gibt es eine Isometrie, die die Eckpunkte des einen Dreiecks auf die entsprechenden Eckpunkte des anderen Dreiecks abbildet.

- Die Isometrien des $\mathbb{R}^2$ bilden mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung und ... eine Gruppe.
- Die Translationen und die Isometrien, die den Nullpunkt festlassen, bilden zwei Untergruppen der Gruppe der Isometrien des $\mathbb{R}^2$.

und natürlich: Rechnungen im $\mathbb{R}^2$, Bestimmung von Geraden, Punkten etc. mit gewissen Eigenschaften; nachrechnen können, das irgenwas (ein) ... ist etc.; Beispiele und Gegenbeispiele zu den einzelnen Definitionen