Übungsblatt 10

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei R ein Ring.

Zeigen Sie folgende Aussagen:

- Das additiv neutrale Element n in R ist eindeutig bestimmt.
- Zu jedem Element $r \in R$ ist das additiv inverse Element eindeutig bestimmt.
- Ist R nullteilerfrei, so folgt aus $r_1, r_2, r_3 \in R$ mit $r_1 \neq n$ und $r_1 \cdot r_2 = r_1 \cdot r_3$ stets $r_2 = r_3$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

- Zeigen Sie, dass die Polynome in einer Variablen X über einem Ring R mit der in der Vorlesung angegebenen Addition und Multiplikation einen Ring bilden!
- Sei $m \in \mathbb{Z}$ fest. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ wie in der Vorlesung definiert einen Ring bildet!

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Zeigen Sie den Gradsatz:

Sei R ein Ring mit additiv neutralem Element n.

- Sind $f, g \in R[X]$ mit $f, g, f + g \neq n$, so ist $\operatorname{grad}(f + g) \leq \max(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)$.
- Sind $f, g \in R[X]$ mit $f, g, f \cdot g \neq n$, so ist $\operatorname{grad}(f \cdot g) \leq \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$. Ist R zusätzlich nullteilerfrei, so gilt sogar: $\operatorname{grad}(f \cdot g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$.

Späteste Abgabe: Fr, 9.7.2010, 12.00 Uhr

Angela Holtmann