Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (4 Punkte)

- Erstellen Sie eine Liste mit allen Primzahlen im Bereich von 1 bis 100. (Diese können Sie im dritten Teil der Aufgabe gut verwenden.)
- Zeigen Sie: Ist eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ *keine* Primzahl, so gibt es einen Primteiler m von n mit $m \leq \sqrt{n}$. (Hierbei bezeichnet $\sqrt{n}$ die eindeutig bestimmte positive Zahl $k \in \mathbb{R}$ mit $k^2 = n$.)
- In Satz 1.3.15 haben wir die geraden vollkommenen Zahlen charakterisiert. Dies waren genau die Zahlen von der Form $2^{s-1} \cdot (2^s - 1)$, wobei $2^s - 1$ eine *Primzahl* ist. Berechnen Sie die Zahlen $2^{s-1} \cdot (2^s - 1)$, $s = 1, \ldots, 16$, und testen Sie, welche der Zahlen vollkommen sind!

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Gegeben sei die Zahl $a := 936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$.

- Bestimmen Sie die Anzahl $\tau(a)$ der positiven Teiler von a, das Produkt $P(a)$ der positiven Teiler von a und die Summe $\sigma(a)$ der positiven Teiler von a.
- Sortieren Sie die Teiler von a wie im Beweis zu Satz 1.3.6, und überzeugen Sie sich, dass dann $d_i \cdot d_{\tau(a)+1-i} = a$ für alle $i = 1, \ldots, \tau(a)$ gilt! (Die einzelnen Gleichungen sind hierbei aufzulisten/hinzuschreiben.)
- Sortieren Sie die Teiler von a wie im Beweis zu Satz 1.3.11 – insgesamt dreimal (für die drei Primzahlen 2, 3 und 13) –, und berechnen Sie die Summe aller Teiler von a direkt (ohne die Formel), indem Sie wie im Beweis zu Satz 1.3.11 Potenzen von 2 und 3 ausklammern!

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass $2^n - 1$ *keine* Primzahl ist, wenn n keine Primzahl ist!

Hinweis: Geben Sie eine explizite Zerlegung von $2^n - 1$ an! Hierzu kann man die geometrische Summenformel aus Lemma 1.3.10 benutzen.

Späteste Abgabe: Fr, 14.5.2010, 12.00 Uhr Angela Holtmann