

ÜBUNGSBLATT 5

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den größten gemeinsamen Teiler folgende Rechenregeln gelten:

- $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a)$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$
- $\text{ggT}(c \cdot a, c \cdot b) = |c| \cdot \text{ggT}(a, b)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$
- Falls $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$, $c \mid a$ und $c \mid b$, so gilt: $\text{ggT}\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{\text{ggT}(a, b)}{|c|}$.
- Seien $a, b \in \mathbb{N}$ *teilerfremd*, d. h. $\text{ggT}(a, b) = 1$, und sei $c \in \mathbb{N}$, so dass sowohl $a \mid c$ als auch $b \mid c$ gilt. Dann gilt auch $a \cdot b \mid c$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Zahl $d \in \mathbb{N}$ genau dann der größte gemeinsame Teiler von $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $d \mid a$ und $d \mid b$ und
- für jedes $d' \in \mathbb{Z}$ mit $d' \mid a$ und $d' \mid b$ gilt: $d \geq d'$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden größten gemeinsamen Teiler, indem Sie die Primfaktorzerlegungen der angegebenen Zahlen ausnutzen:

- $\text{ggT}(8, 12)$
- $\text{ggT}(4, 12)$
- $\text{ggT}(75, 625)$
- $\text{ggT}(576, 484)$
- $\text{ggT}(1428, 333)$
- $\text{ggT}(30031, 2036)$
- $\text{ggT}(247, 299)$
- $\text{ggT}(2^{2^5} + 1, 641)$
(Hinweis: $2^{2^5} + 1 = 4294967297$ ist keine Primzahl.)