

## ÜBUNGSBLATT 9

**Aufgabe 1.** (4 Punkte)

In der folgenden Liste sind jeweils die größten gemeinsamen Teiler mehrerer natürlicher Zahlen gegeben. Stellen Sie diese mit Hilfe von mehrfacher Anwendung des Euklidischen Algorithmus jeweils als ganzzahlige Linearkombination der drei natürlichen Zahlen dar!

- $\text{ggT}(4, 8, 12)$
- $\text{ggT}(75, 625, 3)$
- $\text{ggT}(576, 484, 32)$
- $\text{ggT}(9, 333, 11)$

**Aufgabe 2.** (4 Punkte)

- Zeigen Sie folgende Aussage:  
Ist  $(x_0, y_0, z_0)$  eine Lösung der diophantischen Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$  (in den Variablen  $x, y$  und  $z$ ), so gilt  $\text{ggT}(x_0, y_0) \mid z_0$ .
- Berechnen Sie fünf verschiedene Fundamentallösungen der diophantischen Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$ .

**Aufgabe 3.** (4 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussagen:

- Ist  $c \in \mathbb{Z}$ , so gilt entweder  $4 \mid c^2$  oder  $4 \mid c^2 - 1$ .
- In jeder Fundamentallösung  $(x_0, y_0, z_0)$  der diophantischen Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$  muss die Zahl  $z_0$  ungerade sein.
- Sind  $r, s, t \in \mathbb{Z}$  mit  $r^2 = st$  und  $\text{ggT}(s, t) = 1$ , so sind  $s$  und  $t$  *Quadratzahlen*. (Das heißt, es gibt  $u, v \in \mathbb{Z}$  mit  $s = u^2$  und  $t = v^2$ .)