Übungsblatt 3

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

- Sei A eine 2×2-Matrix, f_A die dadurch beschriebene Abbildung und $P, Q \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$f_A(P+Q) = f_A(P) + f_A(Q).$$

- Seien A und B zwei 2×2-Matrizen, f_A und f_B die dadurch beschriebenen Abbildungen und sei $P \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$f_A \circ f_B(P) = f_{A\cdot B}(P).$$

Aufgabe 2. (8 Punkte)

Im Folgenden sei für eine 2×2-Matrix C immer f_C die zugehörige Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie:

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- $f_A\left(\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -7 \end{smallmatrix}\right)\right)$ für $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- Die Umkehrabbildung zu f_B, wobei $B := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ist.

Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem die Gerade ein, die durch die Punkte $(0,0)$ und $(1,0)$ verläuft! Wohin wird diese Gerade unter der Abbildung f_A, wobei A wie oben definiert ist, abgebildet? Zeichnen Sie auch die Menge dieser Punkte in das Koordinatensystem ein! Wohin wird die Gerade durch die zu den Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ gehörigen Abbildungen abgebildet? Zeichnen Sie auch diese Mengen von Punkten in das Koordinatensystem ein!

(Bitte wenden!)

Bestimmen Sie die Umkehrabbildungen zu den Abbildungen, die durch die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben werden!