

ÜBUNGSBLATT 4

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussagen:

Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ fest und $A := \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, so ist die zugehörige Abbildung

$$f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\cos \alpha)x - (\sin \alpha)y \\ (\sin \alpha)x + (\cos \alpha)y \end{pmatrix}$$

eine Isometrie.

Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fest gewählt, so gilt:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

Hinweis: Sie dürfen die Additionstheoreme benutzen.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Gegeben sei eine euklidische Ebene \mathcal{E} .

Zeigen Sie:

Sind $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ und $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ Isometrien von \mathcal{E} , so ist auch die Hintereinanderausführung $g \circ f$ eine Isometrie.

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die umgekehrte Richtung nicht gilt, dass also, falls die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen eine Isometrie ist, die einzelnen Abbildungen nicht unbedingt Isometrien sein müssen!

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Beschreiben Sie die Drehung des \mathbb{R}^2 um 180° um den Punkt $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Hilfe von Translationen und Drehungen um den Nullpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$!

Zeigen Sie: Die Hintereinanderausführung zweier Translationen des \mathbb{R}^2 ist wiederum eine Translation.

Zeigen Sie: Die Hintereinanderausführung der Spiegelung des \mathbb{R}^2 an der x -Achse mit der Spiegelung an der y -Achse liefert eine Drehung des \mathbb{R}^2 . (Welche?)

Zeigen Sie: Die Hintereinanderausführung der Spiegelung des \mathbb{R}^2 an der x -Achse mit der Spiegelung an der x -Achse liefert ebenfalls eine Drehung des \mathbb{R}^2 . (Welche?)