

ÜBUNGSBLATT 5

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

Jede Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die durch eine 2×2 -Matrix gegeben ist, ist eindeutig festgelegt, wenn man $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ kennt.

Hinweis: Versuchen Sie, beliebige Elemente $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ als $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit reellen Zahlen a, b zu schreiben! Hier sind a und b jeweils in Abhängigkeit von x und y zu bestimmen.¹

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Gegeben sei eine 2×2 -Matrix A mit der zugehörigen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Angenommen, wir wissen, dass $f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_A\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist. Wie sieht dann die Matrix A aus?

Rechnen Sie nach, ob Folgendes gilt:

- $\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \cong \overline{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$?
- $\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \cong \overline{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$?
- $\overline{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}} \cong \overline{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix}}$?
- $\overline{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \cong \overline{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix}}$?

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

- Der Durchschnitt $A \cap B$ zweier konvexer Mengen A und B ist konvex.
- Die Vereinigung $A \cup B$ zweier konvexer Mengen A und B ist konvex.

¹In der Vorlesung hatten wir bereits gesehen, dass man $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ beispielsweise immer als $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ schreiben kann.