Übungsblatt 5

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

Jede Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die durch eine 2×2-Matrix gegeben ist, ist eindeutig festgelegt, wenn man $f\left(\binom{1}{1}\right)$ und $f(\binom{0}{1})$ kennt.

Hinweis: *Versuchen Sie, beliebige Elemente* $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ *als* $\binom{x}{y} = a \cdot \binom{1}{1} + b \cdot \binom{0}{1}$ *mit reellen Zahlen* a, b *zu schreiben! Hier sind* a *und* b *jeweils in Abhängigkeit von* x *und* y *zu bestimmen.*[1]

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Gegeben sei eine 2×2-Matrix A mit der zugehörigen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Angenommen, wir wissen, dass $f_A\left(\binom{1}{0}\right) = \binom{1}{0}$ und $f_A\left(\binom{2}{3}\right) = \binom{0}{1}$ ist. Wie sieht dann die Matrix A aus?

Rechnen Sie nach, ob Folgendes gilt:

- $\overline{\binom{1}{0}\binom{0}{1}} \cong \overline{\binom{-1}{0}\binom{1}{0}}$?
- $\overline{\binom{1}{0}\binom{0}{1}} \cong \overline{\binom{-1}{0}\binom{0}{1}}$?
- $\overline{\binom{4}{5}\binom{2}{-3}} \cong \overline{\binom{2}{1}\binom{0}{-9}}$?
- $\overline{\binom{4}{5}\binom{2}{3}} \cong \overline{\binom{3}{-1}\binom{1}{-9}}$?

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

- Der Durchschnitt $A \cap B$ zweier konvexer Mengen A und B ist konvex.
- Die Vereinigung $A \cup B$ zweier konvexer Mengen A und B ist konvex.

[1] In der Vorlesung hatten wir bereits gesehen, dass man $\binom{x}{y}$ beispielsweise immer als $\binom{x}{y} = x \cdot \binom{1}{0} + y \cdot \binom{0}{1}$ schreiben kann.