Anna

Eigenschaften einfacher Theorien, Teil 2

Wdh: • Die Menge A ist unabh. von B über C, $A \downarrow_C B$, wenn f.a. Tupel $\bar{a} \in A$ der Typ $tp(\bar{a}/BC)$ nicht über C gabelt.

• Sei $(I,<)$ eine lineare Ordnung. Eine Folge $(a_i)_{i\in I}$ ist
- unabh. über A, wenn f.a. $i \in I$ gilt $a_i \downarrow_A A \cup \{a_j : j<i\}$
- eine Morleyfolge über A, falls sie unabh. und ununterscheidbar über A ist
- eine Morleyfolge in $p(x)$ über A, wenn sie eine Morleyfolge über A ist und aus Realisierungen von $p(x)$ besteht.

Lemma 0: $A \subseteq B$. $a \downarrow^d_A B$ und $c \downarrow^d_{Aa} Ba \Rightarrow ac \downarrow^d_A B$

$a \downarrow^d_A B$: $tp(a/BA)$ teilt nicht über A.

Ziel: T einfach $\Leftrightarrow$ $\downarrow$ symmetrisch.

Lemma 1: Wenn $p \in S(B)$ nicht über A gabelt, gibt es eine unendl. Morleyfolge in p über A, die ununterscheidbar über B ist. Insbes. wenn T einfach ist, ex. für jedes $p \in S(A)$ eine unendl. MF in p über A.

Bew: $a_0 \models p$, $p' \supseteq p$ nicht-gabelnde Fortsetzung, $p' \in S(Ba_0)$ $\rightsquigarrow$ erhalte $a_i \downarrow B\{a_j : j<i\}$ beliebig lange Folge $\Rightarrow$ extrahiere ununt. Folge mit Shelahlemma. $\boxtimes$

Prop 2: Sei T einfach und $\pi(x,y)$ ein partieller Typ über A. Sei $(b_i)_{i<\omega}$ eine unendl. MF über A und $\bigcup_{i<\omega} \pi(x,b_i)$ konsistent. Dann teilt $\pi(x,b_0)$ nicht über A.

(Umkehrung gilt auch: Blaises Vortrag)

Bew: Nach dem Standardlemma gibt es f.a. lin. Ord. I eine MF $(b_i)_{i\in I}$ in $tp(b_0/A)$, s.d. $\Sigma(x) = \bigcup_{i\in I} \pi(x, b_i)$ kons. ist. Wähle I mit ~~zu~~ $|T|^+$ inversem Ordnungstyp. Sei $c \models \Sigma(x)$ Realisierung. Da T einfach ist ($\Leftrightarrow$ lok. Char) ex. $J \subseteq I$, $|J| \leq |T|$, s.d. $tp(c/A \cup \{b_i : i \in I\})$ nicht über $A \cup \{b_j : j \in J\}$ teilt. Nach Wahl von I ~~[illegible]~~ ex. $i_0 \in I$ mit $i_0 < J$.

Setze $0 = i_0$. Nach einem Lemma von letzter Woche teilt $tp((b_i)_{i\in J}/Ab_0)$ nicht über A. Also teilt $tp(c(b_i)_{i\in J}/Ab_0)$ nicht über A $\Rightarrow$ $\pi(x, b_0)$ teilt nicht über A. ☒

Prop 3: Sei T einfach. Dann teilt $\pi(x,b)$ über A gdw. $\pi(x,b)$ über A gabelt.

Bew: Nach Def: $\pi(x,b)$ teilt$/A$ $\Rightarrow$ $\pi(x,b)$ forkt $/A$.
Nehme nun an, dass $\pi(x,b)$ nicht über A teilt, d.h. $\pi(x,b) \vdash \psi(x,b)$ mit $\psi(x,b) = \bigvee_{l<d} \varphi_l(x,b)$ dann teilt $\psi(x,b)$ nicht über A.
Lemma 1 $\Rightarrow$ sei $(b_i)_{i\in\omega}$ eine MF in $tp(b/A)$ über A. Dann ist $\{\psi(x,b_i) : i<\omega\}$ kons.
$\Rightarrow$ ex. l und eine unendl. Menge $I \subseteq \omega$, s.d. $\{\varphi_l(x,b_i) : i \in I\}$ kons. ist $\overset{\text{Prop 2}}{\Rightarrow}$ $\varphi_l(x,b)$ teilt nicht$/A$
$\Rightarrow$ $\pi(x,b)$ gabelt nicht über A. ☒

Prop 4 (Symmetrie): In einfachen Theorien ist Unabhängigkeit symmetrisch.

Bew: Sei $A \mathop{\downarrow}_C B$. Betrachte endl. Tupel $a \in A$ und $b \in B$. Da $a \mathop{\downarrow}_C b$, ex. mit Lemma 1 eine unendl. MF $(a_i)_{i<\omega}$ in $tp(a/Cb)$ über C, die ununt. über Cb ist. Sei $p(x,y) = tp(ab/C)$. Dann ist $\bigcup_{i<\omega} p(a_i, y)$ konsistent, da es von b realisiert wird.

Also teilt $p(a,y)$ nicht über $C \Rightarrow b \perp_C a$

Teilen hat endl. Char., $\perp = \perp^d \Rightarrow B \perp_C A$ (Letztes Mal) $\boxtimes$

Korollar 5 (Monotonie und Transitivität): Sei T einfach, $B \subseteq C \subseteq D$. Dann ist

$$A \perp_B D \quad \text{gdw.} \quad A \perp_B C \text{ und } A \perp_C D$$

Bew: "$\Rightarrow$" Monotonie: klar nach Def.

"$\Leftarrow$" Transitivität: Wg. teilen = gabeln, können wir Lemma 0 benutzen.

Ersetze endl. Tupel durch unendl. und erhalte mit Symmetrie: $C \perp_B A$ und $D \perp_C A$ ($\Leftrightarrow D \perp_{CB} AB$)

$\overset{\text{Lemma 0}}{\Rightarrow} CD \perp_B A \Leftrightarrow D \perp_B A \Leftrightarrow A \perp_B D$ $\boxtimes$

Korollar 6: Dass $(a_i)_{i\in I}$ unabh. über A ist, hängt nicht von der Ordnung auf I ab.

Bew: Sei $i \in I$ und $J, K \subseteq I$ mit $J < i < K$.

Schreibe $a_J = \{a_j : j \in J\}$, $a_K = \{a_k : k \in K\}$

Zeige $a_i \perp_A a_J a_K$. Wir wissen (letztes Mal) $a_K \perp_A a_J a_i$.

Mon. $\Rightarrow a_K \perp_{Aa_J} a_i$, Symm $\Rightarrow a_i \perp_{Aa_J} a_K$

Außerdem $\underset{(a_i)_{i\in I} \text{ unabh.}}{} a_i \perp_A a_J \overset{\text{Trans.}}{\Rightarrow} a_i \perp_A a_K a_J$. $\boxtimes$

<u>Bem</u>: Eine Familie $(a_i : i \in I)$ heißt unabh. /A, wenn sie unabh. ist für eine Ordnung auf I.

$(a_i)_{i\in I}$ ist unabh. /A gdw. $a_i \perp_A \{a_j : j \in I \setminus \{i\}\}$ gilt.

Eine Menge B ist unabh. /A, wenn $b \perp_A B \setminus \{b\}$ f.a. $b \in B$ gilt.

Lemma 7: T einfach, I eine unendl. MF über A. Wenn I ununt. /Ac ist, dann gilt $c \perp_a I$.

Bew: Ang. $I = (a_i)_{i \in \omega}$. Betrachte ein $\varphi(x, a_0, \dots, a_{n-1}) \in tp(c/AI)$.

Setze $b_i = (a_{ni}, \dots, a_{ni+n-1})$

$\Rightarrow (b_i)_{i \in \omega}$ ist MF über A und $\{\varphi(x, b_i) : i \in \omega\}$ ist kons. (wird von c realisiert).

Prop 2 $\Rightarrow \varphi(x, a_0, \dots, a_{n-1})$ gabelt nicht /A $\boxtimes$

Def: Sei $\varphi(x,y)$ eine Formel und $k<\omega$. Der Rang $D(\dots, \varphi, k)$ ist wie folgt auf partiellen Typen induktiv definiert:

(1.) $D(\pi(x), \varphi, k) \geq 0$, wenn $\pi(x)$ kons. ist.

(2.) $D(\pi(x), \varphi, k) \geq n+1$, wenn es ein a gibt mit $D(\pi(x) \wedge \varphi(x,a), \varphi, k) \geq n$ ist und $\varphi(x,a)$ über $dom(\pi(x))$ bzgl. k teilt.

Schreibe $D(a/A, \varphi, k)$ für $D(tp(a/A), \varphi, k)$.

Lemma 8: Sei $\pi(x)$ partieller Typ über A, s.d. $D(\pi, \varphi, k) \geq n$. Dann ex. eine Vervollst. p von π über A, s.d. $D(p, \varphi, k) \geq n$ gilt.

Bew: Induktion.

Lemma 9: Sei $D(x=x, \varphi, k) \geq n$, f.a. $n \in \omega$. Dann ex. für jede lin. geordnete Menge I:

(1.) eine ununt. Folge $(b_i a_i : i \in I)$, s.d. $\models \varphi(b_i, a_0)$ und $\varphi(x, a_i)$ über $\{b_j a_j : j<i\}$ $\forall i \in I$ teilt bzgl. k

und (2.) ein Tupel b und eine b-ununt. Folge $(a_i)_{i \in I}$, s.d. $\models \varphi(b, a_0)$ und $\varphi(x, a_i)$ über $\{a_j : j<i\}$ $\forall i \in I$ teilt bzgl. k.

Bew: Sei $\pi(x)$ ein partieller Typ über A und $D(\pi, \varphi, k) \geq n+1$. Nach Def. ex. $b \models \pi$ und a s.d. $b \models \pi(x) \cup \{\varphi(x,a)\}$, $\varphi(x,a)$ teilt über A bzgl. k und $D(\pi \cup \{\varphi(x,a)\}, \varphi, k) \geq n$.

Da $D(x \doteq x, \varphi, k) \geq n+1$ f.a. $n \in \omega$ gilt, finde induktiv $\forall n \in \omega$ $(b_i^n a_i^n)_{i \leq n}$, s.d. gilt:

Wenn $A_i^n = \{b_j^n a_j^n : j < i\}$ und $\pi_i^n(x) = \bigwedge_{j<i} \varphi(x, a_j^n)$ ein part. Typ über A_i^n ist, dann gilt $b_i^n \models \pi_i^n(x) \cup \{\varphi(x, a_i^n)\}$, $\varphi(x, a_i^n)$ teilt über A_i^n bzgl. k und $D(\pi_i^n \cup \{\varphi(x, a_i^n)\}, \varphi, k) \geq n-i$.

D.h. f.a. $n < \omega$ ex. Folge $(b_i^n a_i^n : i < n)$ s.d. $\models \varphi(b_j^n, a_j^n)$ für $j \leq i < n$ und $\varphi(x, a_i^n)$ teilt über $\{b_j a_j : j < i\}$ f.a. $i < n$.

Nach Kptheit ex. unendl. solche Folge.

Nach Standardlemma ex. ununt. Folge von Ordnungstyp I $\Rightarrow$ (1.)

Sei nun $(b_i a_i)_{i \leq \omega}$ eine Folge wie in (1.) setze $b = b_\omega$.

Dann ist $(a_i)_{i \leq \omega}$ b-ununt., $\models \varphi(b, a_i)$ und $\varphi(x, a_i)$ teilt über $(a_j)_{j<i}$ bzgl. k f.a. $i \in \omega$ $\overset{\text{Kptheit}}{\Rightarrow}$ (2.) ☒

Prop 10: Wenn teilen oder gabeln symmetrisch ist, dann ist $D(\pi, \varphi, k) < \omega$ f.a. partiellen Typen $\pi(x)$, alle Fml. $\varphi(x,y)$ und alle $k < \omega$.

Bew: Ang. $D(x \doteq x, \varphi, k) \geq \omega$ für eine Fml. φ und ein $k \in \omega$. Dann ex. (Lemma 9) ein b und eine b-ununt. Folge $(a_i)_{i \leq \omega}$ s.d. $\models \varphi(b, a_i)$ und $\varphi(x, a_\omega)$ teilt ($\Rightarrow$ gabelt) über $\{a_i : i < \omega\}$.

d.h. $b \underset{(a)_{i<\omega}}{\not\downarrow} a_\omega$

Aber $tp(a_\omega / b, (a_i)_{i<\omega})$ endl. erfüllbar in $\{a_i : i < \omega\}$, weil $(a_i)_{i \leq \omega}$ b-ununt. ist.

Also gabelt $tp(a_\omega / b, (a_i)_{i<\omega})$ nicht über $\{a_i : i < \omega\}$

d.h. $a_\omega \underset{(a_i)_{i<\omega}}{\downarrow} b$ $\Rightarrow$ weder teilen noch gabeln symm. ☒

Satz 11: T ist einfach gdw $\downarrow$ symmetrisch ist.

Bew: "$\Rightarrow$" Prop 4.

"$\Leftarrow$" T nicht einfach $\Rightarrow$ ex. φ-k-Teilungsfolge der Länge n f.a. $n \in \omega$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $D(\pi, \varphi, k) \geq n \quad \forall n \in \omega$

$\overset{\text{Prop 10}}{\Rightarrow}$ Unabh. nicht symmetrisch

$(*)$: Induktion.

$n = 0$ $\quad D(x = x, \varphi, k) \geq 0$.

$n \rightsquigarrow n+1$: Sei $(a_i)_{i \in \omega}$ φ-k-TF, $\pi(x) = \cancel{\{\varphi(x, a_i) \mid i \in \omega\}}\ \{x = x\}$

Nach I.V. ist $D(\pi(x) \cup \varphi(x, a_0), \varphi, k) \geq n$

$\varphi(x, a_0)$ teilt über $(a_i)_{i>0}$

$\Rightarrow D(\pi(x), \varphi, k) \geq n+1$ $\quad \boxtimes$