Der Zufallsgraph

Sei R binäre Relation und $L = \{R\}$ Sprache.

Die Theorie der Graphen ist:

$$T_{graph} = \{ \forall x \, \neg R(x,x), \ \forall x,y \ R(x,y) \to R(y,x) \}$$

Die Zufallsgraphenaxiome für $n,m \in \mathbb{N}$ sind:

$$\psi_{n,m} := \forall x_0 \ldots x_n y_0 \ldots y_m \left(\bigwedge_{i \neq j} \neg x_i \doteq y_j \to \exists z \left(\bigwedge_{i \leq n} R(x_i, z) \wedge \bigwedge_{i \leq m} (\neg R(y_j, z) \wedge \neg y_j \doteq z) \right) \right)$$

Die Theorie des Zufallsgraphen ist:

$$T_{RG} := T_{graph} \cup \{ \psi_{n,m} \mid n,m \in \mathbb{N} \}$$

<u>Satz:</u> Für eine Theorie T sind äquivalent:

(1) T hat Quantorenelimination

(2) Für alle Modelle $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T$ und für alle gemeinsamen Unterstrukturen $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ gilt: $(\mathfrak{M}_1, a)_{a \in A} \equiv (\mathfrak{M}_2, a)_{a \in A}$

(3) Für alle Modelle $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T$ und für alle gemeinsamen Unterstrukturen $\mathfrak{A} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ und für alle primitiven Existenzformeln $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ gilt:

$$\mathfrak{M}_1 \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{M}_2 \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$$

Enthält L keine Konstanten, so ist für $\mathfrak{A}$ (ausnahmsweise) auch die leere Struktur zugelassen!

<u>Satz:</u> T_{RG} hat Quantorenelimination und ist vollständig.

<u>Beweis:</u> Seien $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \models T_{RG}$ Modelle und $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ gemeinsame Unterstruktur mit $\mathfrak{A} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Sei $\Phi(\bar{x}) = \exists y\ \Psi(\bar{x}, y)$ primitive Existenzformel und gelte $\mathcal{M}_1 \models \Psi(\bar{a}, b_1)$ für $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b_1 \in \mathcal{M}_1$.

<u>$b_1 \in A$:</u> dann gilt $\mathcal{M}_2 \models \Psi(\bar{a}, b_1)$

<u>$b_1 \notin A$:</u> betrachte $X := \{x \in A \mid R(x, b_1)\}$, $Y := \{y \in A \mid \neg R(y, b_1)\}$

X und Y sind endlich und zueinander disjunkt

$$\overset{T_{RG}\text{-Axiome}}{\Longrightarrow} \mathcal{M}_2 \models \exists b_2 : \bigwedge_{x \in X} R(x, b_2) \wedge \bigwedge_{y \in Y} (\neg R(y, b_2) \wedge \neg y \doteq b_2)$$

für $b_2 \in \mathcal{M}_2$

$$\Longrightarrow \mathcal{M}_2 \models \Psi(\bar{a}, b_2)$$

In beiden Fällen: $\mathcal{M}_2 \models \Phi(\bar{a})$.

Ist $\mathfrak{A}$ die leere Struktur, so sind die primitiven Existenzformeln in einer Variablen bereits äquivalent zu $\top$ oder $\bot$ ($\exists y\ y \doteq y$, $\exists y\ R(y,y)$, –).

Insgesamt: T_{RG} hat Quantorenelimination und da L keine Konstanten hat, ist T_{RG} vollständig $\square$

Definition: Eine Theorie T heißt modellvollständig, wenn für alle Modelle $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T$ gilt: in VL def.

$$\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \Rightarrow \mathfrak{M}_1 \preceq \mathfrak{M}_2$$

Definition: Sei T eine Theorie. Eine Theorie T^* heißt Modellbegleiter von T, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

(1) Jedes Modell von T kann zu einem Modell von T^* erweitert werden.

(2) Jedes Modell von T^* kann zu einem Modell von T erweitert werden.

(3) T^* ist modellvollständig.

Satz: T_{RG} ist Modellbegleiter von T_{graph}.

Beweis: (1) Sei $\mathfrak{A} \models T_{graph}$ und $\mathfrak{B} \models T_{RG}$.

Zeige: $\mathfrak{B}_{f(A)} = (\mathfrak{B}, f(a))_{a \in A} \models \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$, $f: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ Einbettung

mit $\mathrm{Diag}(\mathfrak{A}) = \{\varphi(a) \mid \mathfrak{A} \models \varphi(a), \varphi \text{ basic } L\text{-Formel}, a \in A\}$

Sei $\Sigma(\bar{a}) \subseteq \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ endliche Teilmenge,

$\bar{a} = (a_1, -, a_n) \in A$.

Konstruiere $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ s.d. $\mathfrak{B} \models \Sigma(h(\bar{a}))$

für $i=1$: wähle $b_1 \in B$ beliebig,

dann $h_1 := \{(a_1, b_1)\}$

für $i = 2, \dots, n$: setze $X = \{a_j \mid j < i \wedge R(a_j, a_i)\}$,

$Y = \{a_j \mid j < i \wedge \neg R(a_j, a_i)\}$.

betrachte $h_{i-1}(X)$, $h_{i-1}(Y)$

$\overset{T_{RG}\text{-Axiome}}{\Longrightarrow}$ es existiert $b_i \in \mathfrak{B}$ mit $R(b_i, h_{i-1}(X))$

und $\neg R(b_i, h_{i-1}(Y))$ und $b_i \notin h_{i-1}(Y)$

setze $h_i = h_{i-1} \cup \{(a_i, b_i)\}$

Dann, für $h := h_n$ gilt $\mathfrak{B}_{h(\bar a)} \models \Sigma(h(\bar a))$, $\cancel{\mathfrak{B}_A \models \Sigma(\bar b)}$)

Kompaktheit $\overset{\exists f}{\Longrightarrow}$ $\mathfrak{B}_{f(A)} \models \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$

$\Longrightarrow$ $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_{f(A)}$ Substruktur.

(2) klar, da $T_{graph} \subset T_{RG}$

(3) folgt direkt aus Quantorenelimination.

$\square$

Bezeichne $p_N(\varphi)$ die Wahrscheinlichkeit, dass für einen Graphen G_N mit $N \in \mathbb{N}$ Knoten gilt: $G_N \models \varphi$, wobei φ eine L-Formel.

<u>Lemma</u>: Es gilt $\lim_{N\to\infty} p_N(\Psi_{n,m}) = 1$ für alle $n,m \in \mathbb{N}$.

($\Psi_{n,m}$ RG-Axiom)

<u>Beweis</u>: Seien $n,m \in \mathbb{N}$ und G_N ein Graph mit $N > n+m$ Knoten. Seien $x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{m-1}, z \in G_N$ paarweise verschieden. Beschreibe $q \in (0,1)$ die (unabhängige) Wahrscheinlichkeit, dass zwei Knoten in G_N über eine Kante verbunden sind.

Die Wahrscheinlichkeit für $G_N \models \overbrace{\bigwedge_{i<n} R(x_i,z) \wedge \bigwedge_{j<m} \neg R(y_j,z)}^{=:\varphi(z)}$ ist $q' = q^n(1-q)^m$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für $G_N \models \nexists z (\bigwedge_{i<n} \neg x_i \doteq z \wedge \bigwedge_{j<m} \neg y_j \doteq z) \longrightarrow \varphi(z)$ gleich $(1-q')^{N-(n+m)}$. Da die Anzahl der Paare von n- und m-elementigen, disjunkten Teilmengen einer N elementigen Menge kleiner ist als N^{n+m} (da $\binom{N}{n}\binom{N-n}{m} \leq N^n \cdot N^m = N^{n+m}$, kombinatorisch), folgt: $\lim_{N\to\infty} p_N(\neg \Psi_{n,m}) \leq \lim_{N\to\infty} N^{n+m}(1-q')^{N-(n+m)}$

$= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N}{1-q'}\right)^{n+m}(1-q')^N = 0$. Damit $\lim_{N\to\infty} p_N(\Psi_{n,m}) = 1$. $\square_{\text{IE}}$

0-1 Gesetz für Graphen: Für jede L-Aussage ϕ gilt entweder $\lim_{N\to\infty} pr(\phi)=0$ oder $\lim_{N\to\infty} pr(\phi)=1$.

Beweis: Gilt $T_{RG} \vdash \phi$, so gilt $\psi_{n_1,m_1} \wedge \ldots \wedge \psi_{n_k,m_k} \to \phi$. Nach obigem Lemma gilt $\lim_{N\to\infty} pr(\psi_{n_i,m_i})=1$ für $i=1,\ldots,k$. Also auch $\lim_{N\to\infty} pr(\phi)=1$.

Gilt $T_{RG} \nvdash \phi$, so gilt da T_{RG} vollständig, $T_{RG} \vdash \neg\phi$.

Dann $\lim_{N\to\infty} pr(\neg\phi)=1$ und $\lim_{N\to\infty} pr(\phi)=0$. $\square$

Satz von Kim-Pillay: Sei T eine vollständige Theorie und $a \mathop{\downarrow}^{o}_{A} B$ eine, unter Automorphismen invariante, Relation zwischen einem endlichen Tupel a und Mengen A, B. Erfüllt die Relation folgende Eigenschaften:

a) Monotonie und Transitivität: $a \mathop{\downarrow}^{o}_{A} BC \iff a \mathop{\downarrow}^{o}_{A} B$ und $a \mathop{\downarrow}^{o}_{AB} C$

b) Symmetrie: $a \mathop{\downarrow}^{o}_{A} b \iff b \mathop{\downarrow}^{o}_{A} a$

c) endlicher Charakter: wenn $a \mathop{\downarrow}^{o}_{A} b$ für alle endlichen $b \in B$, dann $a \mathop{\downarrow}^{o}_{A} B$

d) lokaler Charakter: es existiert eine Kardinalzahl $\mathcal{K}$, so dass für alle a, B ein $B_0 \subseteq B$ existiert mit $|B_0| < \mathcal{K}$ und so dass $a \mathop{\downarrow}_{B_0} B$ gilt

e) <u>Existenz</u>: für alle a, A, C existiert a', so dass
$tp(a'/A) = tp(a/A)$ und $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\,|}^{0}_{A} C$ gilt

f) <u>Unabhängigkeit über Modellen</u>: Sei M Modell,
$tp(a'/M) = tp(b'/M)$ und $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\,|}^{0}_{M} b$, $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\,|}^{0}_{M} a$, $b' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\,|}^{0}_{M} b$.
Dann existiert c so dass $tp(c/Ma) = tp(a'/Ma)$,
$tp(c/Mb) = tp(b'/Mb)$ und $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\,|}^{0}_{M} ab$ gilt.

Dann ist T einfach und es gilt $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\,|}^{0} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\,|}$.

<u>Beweis</u>: Vortrag 11

<u>Satz</u>: T_{RG} ist einfach.

<u>Beweis</u>: Setze $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\,|}^{0}_{C} B :\Leftrightarrow A \cap B \subseteq C$ und verwende Kim-Pillay. Sei a endlich.

<u>a)</u> "$\Rightarrow$" folgt aus $a \cap (B \cup C) \subseteq A \Leftrightarrow a \cap B \subseteq A$ und $a \cap C \subseteq A$

"$\Leftarrow$" gelte $a \cap B \subseteq A$ und $a \cap C \subseteq A \cup B$

$$\Rightarrow a \cap (B \cup C) \subseteq A \cup B \Rightarrow a \cap (B \cup C) \subseteq a \cap (A \cup B)$$
$$\overset{a \cap B \subseteq A}{\Longrightarrow} a \cap (B \cup C) \subseteq A$$

<u>b)</u> folgt da $a \cap b = b \cap a \subseteq A$

c) es gilt entweder $a \cap b = \emptyset \subseteq A$
oder $\emptyset \neq a \cap b \subseteq A$ für alle endlichen $b \in B$.

Also $a \cap \bigcup_{b \in B} b \subseteq A$

d) Sei $K = \aleph_0$:

$a \cap B = \emptyset$: setze $B_0 := \{\emptyset\}$

$a \cap B \neq \emptyset$: setze $B_0 := a \cap B$, dann $|B_0| < \aleph_0$ da a endlich

e) Seien $a = (a_1, \dots, a_n), A, C$ gegeben.

Wir konstruieren $a' = (a'_1, \dots, a'_n)$, für $i = 1, \dots, n$:

$a_i \in A$: dann $x \doteq a_i \in tp(a/A)$, also setze $a'_i := a_i$,

da dann $a'_i \underset{A}{\overset{0}{\downarrow}} C$ da $a_i \in A$.

$a_i \notin A$: Wir zerlegen A: $X := \{x \in A \mid R(x, a_i)\}$

$Y := \{y \in A \mid \neg R(y, a_i)\}$

offensichtlich gilt $X \cap Y = \emptyset$, also ist

$T_{RG} \cup \{\exists a'_i \mid a'_i \notin C \cup Y \wedge R(a'_i, X) \wedge \neg R(a'_i, Y)\}$

endlich erfüllbar. Kompaktheit $\Rightarrow$ Existenz von a'_i

Es gilt $a'_i \underset{A}{\overset{0}{\downarrow}} C$, da $a'_i \notin C$,

und $tp(a'_i/A) = tp(a_i/A)$ per Konstruktion.

Insgesamt: $a' \underset{A}{\overset{0}{\downarrow}} C$, da für $i = 1, \dots, n$: $a'_i \in A$ oder $a'_i \notin C$

und $tp(a'/A) = tp(a/A)$, da für $i = 1, \dots, n$: $tp(a'_i/A) = tp(a_i/A)$

und da entweder $a'^{\in A}_i \doteq a_i^{\in A}$ oder $a_i, a'_i \notin A$ gilt.

f) Sei $\mathcal{M} \models T_{RG}$, a, b, a', b' mit $tp(a'/\mathcal{M}) = tp(b'/\mathcal{M})$

und $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\downarrow}^0_{\mathcal{M}} b$, $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\downarrow}^0_{\mathcal{M}} a$, $b' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\downarrow}^0_{\mathcal{M}} b$.

Wir konstruieren $c = (c_1, \ldots, c_n)$: für $i = 1, \ldots, n$:

$a_i' \in \mathcal{M}$: dann $x \doteq a_i' \in tp(a'/\mathcal{M}) = tp(b'/\mathcal{M})$,

also setze $c_i := a_i' = b_i'$, dann $c_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\downarrow}^0_{\mathcal{M}} ab$, da $c_i \in \mathcal{M}$.

$a_i' \notin \mathcal{M}$: dann auch $b_i' \notin \mathcal{M}$,

zerlege: $X_{\mathcal{M}} := \{x \in \mathcal{M} \mid R(x, a_i')\}$, $Y_{\mathcal{M}} := \{y \in \mathcal{M} \mid \neg R(y, a_i')\}$

$X_a := \{x \in a \mid R(x, a_i')\}$, $Y_a := \{y \in a \mid \neg R(y, a_i')\}$

$X_b := \{x \in b \mid R(x, b_i')\}$, $Y_b := \{y \in b \mid \neg R(y, b_i')\}$

Es gilt je $X_h \cap Y_\ell = \emptyset$ für $h, \ell \in \{\mathcal{M}, a, b\}$,

da $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\downarrow}^0_{\mathcal{M}} b$. Also, für $X' = X_{\mathcal{M}} \cup X_a \cup X_b$, $Y' = Y_{\mathcal{M}} \cup Y_a \cup Y_b$,

$X' \cap Y' = \emptyset$. Damit ist:

$T_{RG} \cup \{\exists c_i \mid c_i \notin Y' \wedge R(c_i, X') \wedge \neg R(c_i, Y')\}$

endlich erfüllbar. Kompaktheit $\Rightarrow$ Existenz von c_i,

mit $c_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\downarrow}^0_{\mathcal{M}} ab$, da $c_i \notin a = X_a \cup Y_a$ und $c_i \notin b = X_b \cup Y_b$

und $tp(c_i/\mathcal{M}a) = tp(a_i'/\mathcal{M}a)$ und $tp(c_i/\mathcal{M}b) = tp(b_i'/\mathcal{M}b)$

da $a_i' \notin a$, da $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\downarrow}^0_{\mathcal{M}} a$ und $a_i' \notin \mathcal{M}$, ebenso $b_i' \notin b$

und $c_i \notin a \cup b$, also $x \neq c_i \leftrightarrow x \neq a_i' \leftrightarrow x \neq b_i'$

(Gleichheit f. kein $x \in \mathcal{M} \cup a \cup b$) für alle $x \in \mathcal{M} \cup a \cup b$.

Insgesamt: $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\circ}_{M} ab$, da entweder $c_i \in M$ oder $c_i \notin a \cup b$,

und $tp(c/Ma) = tp(a'/Ma)$, $tp(c/Mb) = tp(b'/Mb)$

da für $i = 1, \dots, n$: entweder $c_i \doteq a_i' \doteq b_i'$ mit $c_i, a_i', b_i' \in M$

oder $c_i \notin M \cup a \cup b$ und $a_i' \notin M \cup a$ oder $b_i' \notin M \cup b$ gilt. □

Also T_{na} einfach und $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\circ} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}$.

(also $a \cap B \subseteq C \iff tp(a/BC)$ forkt nicht über C)

<u>alternativ zu Kim-Pillay</u>: Wollen zeigen:

$tp(a/BC)$ forkt nicht über $C \iff a \cap B \subseteq C$

<u>Zeige</u>: für $b \in B$ ist $x \doteq b \in tp(a/BC)$ die <u>einzige</u> teilende Formel, dann gilt:

$tp(a/BC)$ forkt über $C \iff tp(a/BC) \to \bigvee_{i \in I} x \doteq b_i$ mit $b_i \in B \setminus C$.

Da $x \doteq b \in tp(a/BC)$, $b \in B \setminus C$), nur dann, wenn $a \in B \setminus C$,

folgt $tp(a/BC) \to \bigvee_{i \in I} x \doteq b_i$, $b_i \in B \setminus C \iff a \in B \setminus C$

$\implies tp(a/BC)$ forkt über $C \iff a \in B \setminus C$,

was äquivalent ist zu:

$tp(a/BC)$ forkt nicht über $C \iff a \notin B \setminus C \iff a \cap B \subseteq C$