Geom. Gr. theorie, II

Plan: - Komplexe
- small cancellation
- Gromovs Satz über polyn. Wachstum
- asympt. Kegel.

Literatur: (i) Bogopolski: Introd. to Gp Theory
(ii) Lyndon - Schupp: Combin. Gp Theory
(iii) Drutu - Kapovich: Geom. Gp. Theory

§ 1. Komplexe

1 - Komplex = Graph.

Erinnerung: Cayley - Graph: Ist $G = \langle X \rangle$ mit $X = X^{-1}$, dann ist der Cayley - Graph der Graph mit Vert.menge G und Kantenmenge $\{(g, \cancel{x}g) \mid g \in G, x \in X\}$.

Um die Multipl.richtung zu markieren def. wir:

Def: 1.1 (i) Ein 1 - Komplex (= Graph) besteht aus einer Vertexmenge V, Kantenmenge E und Abb. $\alpha : E \to V$, $\omega : E \to V$, $\eta_1 : E \to E$.

Für $e \in E$ heißt $\alpha(e) \in V$ Anfangspkt von e
$\omega(e) \in V$ Endpkt

+ und $\eta_1(e) \in E$ Inverses e^{-1} von e.

Wir verlangen: $\eta_1^2(e) = e$

und $\alpha(\eta_1(e)) = \omega(e)$, $\omega(\eta_1(e)) = \alpha(e)$.

Bem: Jede Kante hat Orientierung, aber da auch die inverse Kante ex, ist der Gph eigentl. ungerichtet.

(ii) Ein Weg in C ist eine bel. lange Folge

$p = e_1 \dots e_n$, $n \geq 1$, mit $e_i \in E$, $\alpha(e_{i+1}) = \omega(e_i)$.
$\alpha(e_1)$ heißt Anf.pkt, $|p| = n$ die Länge des Weges.
Ein Weg $p = e_1 \dots e_n$ mit $\alpha(e_1) = \omega(e_n)$ heißt Schleife.

Anstelle eines Weges der Länge $n = 0$, führen wir triviale Wege 1_v, $v \in V$, ohne Kanten ein, d.h. $\alpha(1_v) = \omega(1_v) = v$, $|1_v| = 0$.

Für $p = e_1 \dots e_n$ heißt $p^{-1} = e_n^{-1} \dots e_1^{-1}$ invers. Weg.

Bem: Ist $p = e_1 \dots e_n$ eine Schleife, dann auch

$p' = p_i \cdots p_n p_1 \cdots p_{i-1}$, die zykl. Permut.

(iii) Ein Weg ist reduz., falls er keinen Teilweg ee^{-1} enthält. Eine Schleife ist zyklisch reduziert, falls reduz. und $e_1 \neq e_n^{-1}$.
Ein Weg heißt einfach, falls für $i \neq j$
$\alpha(e_i) \neq \alpha(e_j)$ und $\omega(e_i) \neq \omega(e_j)$.

Def 1.2 Ein 2-Komplex C besteht aus einem 1-Kompl. C^1 (dem Skelett von C) und einer Menge von 2-Zellen (oder Flächen) F und Abb. ∂ und η_2, so dass für $D \in F$

$\partial(D)$ eine zykl. red. Schleife in C^1

und $\eta_2(D) = D^{-1} \in F$, $\eta_2^2(D) = D$, $D \neq D^{-1}$, mit $\partial(\eta_2(D)) = \partial(D)^{-1}$!

Wir sagen, dass ein Vertex v in D liegt, falls er in $\partial(D)$ als Auf.pkt einer Kante vorkommt. Ein Rand für D in v ist dann eine zykl. Perm. von $\partial(D)$, die in v beginnt.

Bem: (i) Meistens sind wir interessiert an dem Fall, wo $\partial(D)$ einf. Weg ist. Dann ist der Rand von D in v eind.

(ii) Jeder 1-Kompl. ist 2-Kompl. mit $F = \emptyset$.

Def 1.3 (i) Sei $\Pi(C)$ die Menge aller Wege in C. Für Wege p, q in C^1 mit $\alpha(q) = \omega(p)$ def. $p \cdot q$ als Verkettung beider Wege. Dieses Prod. ist assoz. mit $1_{\alpha(p)} p = p = p \cdot 1_{\omega(p)}$ und $(pq)^{-1} = q^{-1} p^{-1}$ falls das Prod. def. ist. M.a.W. $\Pi(C)$ ist Semi-Gruppoid.

(ii) Wir sagen, dass p, q 1-äquiv. sind, $p \underset{1}{\sim} q$, falls man p in q überführen kann durch Einfügen oder Streichen von Wegen der Form ee^{-1} (endl. oft).

Offens. ist $\underset{1}{\sim}$ eine Äquiv.rel. und es gilt

$$p \underset{1}{\sim} p', \; q \underset{1}{\sim} q' \text{ und } pq \text{ def.} \Rightarrow pq \underset{1}{\sim} p'q'$$

$$p \underset{1}{\sim} p' \Rightarrow p^{-1} \underset{1}{\sim} p'^{-1}.$$

Der Quotient $\Pi'(C)$ ist Gruppoid.

<u>Bem:</u> Jeder Weg ist 1-äquiv. zu <u>eind</u>. red. Weg. Insbes. sind reduz. Schleifen niemals 1-äquiv. zu den 1_v.

(iii) Wir sagen, dass p, q 2-äquiv. sind, $p \sim q$, falls man p in q überführen kann durch eine Folge von Einfügungen oder Streich. von ee^{-1} oder Randwegen $\partial(D)$ an einem Vertex.

Wie oben gilt: $\sim$ ist Äquiv.rel., die mit Multipl. und Inv. verträglich ist.

Wir setzen $\pi_1(C)$, das Fundamentalgruppoid von $\cancel{\Pi(C)}$ als Quot. von $\Pi(C)$ unter $\sim$.

<u>Bem:</u> Es gilt $\Pi'(C) = \Pi'(C') = \pi(C')$ und $\pi(C)$ ist Quotient von $\pi(C')$.

(iv) Für $v \in V$ ~~sei~~ $\Pi(C, v)$ Menge der Schleifen in v, Dann heißt der Quotient von $\Pi(C, v)$ unter $\sim$ $\pi(C, v)$ die Fundamentalgr. von C an v.

<u>Bem:</u> Ist C zusamh., d.h. C' zsh. Gph, dann sind alle Fundam.gp von C konjugiert, i.e $\pi(C, v_0) \simeq \pi(C, v_1)$.

Prop 1.4 Ist C 1-Kompl., dann ist $\pi(C,v)$ freie Gr.

Bew: Wähle Spannbaum T in C (mit Zorns Lemma). O.B.d.A zsh
Für jede Kante $e \notin T$ setze p_e als Schleife an v durch Spannbaum und e. Diese Schleifen bilden Basis für $\pi(C,v)$.

Kor 1.7 Ist C endl. 1-Komplex, $v \in C^0 = V$, $C^1 = E$, dann ist $\pi(C,v)$ freie Gr. von Rg $\frac{1}{2}|C^1| - |C^0| + 1$.

Erinnerung: Eine Präsentierung $G = \langle X \mid R \rangle$ ist gegeben durch $\langle X \rangle = G$, $R \subseteq F(X)$ mit

$$G \simeq F(X) / \langle R \rangle^{F(X)},$$

wobei $\langle R \rangle^{F(X)}$ der von R erz. NT in $F(X)$ ist. (o.B.d.A $r \in R$ zykl. red.)

Hierbei ist $F(X)$ die frei Gruppe über X.

Def 1.5. Eine Gruppe G heißt <u>frei über X</u> $\subseteq G$, falls $X \cap X^{-1} = \emptyset$ und jedes $g \in G$ sich eindeutig als reduz. Prod. $g = x_1 \dots x_k$ mit $x_i \in X \cup X^{-1}$ schreiben lässt. (red.: $x_i x_{i+1} \neq x_i x_i^{-1}$)

Bem 1.6: Für jede Menge X ex. eine Gr. $F(X)$, die frei über X ist. Es gilt $F(X) \simeq F(Y)$ gdw $|X| = |Y|$. Insbes. sind alle Gr., die frei über X sind isom.

<u>Def</u> 1.7 Für eine Präsentierung $G = \langle X | R \rangle$, wobei alle $r \in R$ zykl. red. sind, sei $K(X|R)$ der Komplex mit nur einem Vertex v, Kanten $\tilde{x}, \tilde{x}^{-1}$ für $x \in X$ mit $\alpha(\tilde{x}) = \omega(\tilde{x}) = \alpha(\tilde{x}^{-1}) = \omega(\tilde{x}^{-1}) = v$ und Flächen D_r, D_r^{-1} für $r \in R$ mit $\partial(D)$ an v ist $\tilde{x}_1^{\varepsilon_1} \cdots \tilde{x}_n^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i = \pm 1$ für $r = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$.

<u>Prop</u> 1.8 Ist $G \cong \langle X | R \rangle$, $K = K(X|R)$, dann ist $\pi(K, v) \cong G$.

<u>Bew</u>: Sei $\varphi: F(X) \to \pi(K')$, $x \mapsto \tilde{x}$. Weil $\{v\}$ ein max Baum in K' ist, zeigt der Bew von Prop 1.4, dass $\varphi: F(X) \xrightarrow{\cong} \pi(K')$. Sei $\psi: \pi(K') \to \pi(K)$ die Proj. Dann ist $\varphi(R) \subseteq \ker \psi$. Umgekehrt: sind $p \sim p'$, dann sind ihre Äquiv. kl. kongr. mod $\varphi(R)$.

<u>Bem</u> 1.9 (i) Eine Gr. G heißt <u>endl. präsentiert</u>, falls es endl. Mengen X, $R \subseteq F(X)$ gibt mit $G \cong \langle X | R \rangle$.

(ii) Es ist G endl. präs. gdw G Fundamentalgr eines endl. 2-Komplexes ist.

<u>Def</u> 1.10 Seien C, C' 2-Kompl. Dann heißt eine Abb $f: C' \to C$ <u>Überdeckung</u>, wenn sie Dimens. und Inzidenz erhält, surj. ist und für jedes $v \in C'^0$ f injektiv ist auf der Menge der Kanten und

Flächen, die v enthalten.

<u>Satz</u> 1.11 Ist $f: C' \to C$ eine Überd. von 2-Kompl, $v' \in C'^0$, dann induz. f einen Monom
$$f^*: \pi(C', v') \longrightarrow \pi(C, f(v)).$$

<u>Bew</u>: Offensichtlich bildet f geschl. Wege in C' an v' in geschl. Wege in C an $f(v)$ ab. Sind zwei Wege in C' 2-äquiv., dann auch ihre f-Bilder in C, d.h. f induz. Abb f^* auf $\pi(C', v') \to \pi(C, f(v))$.

Offens. ist f^* ein Gr. homom.

Weil f surj auf C und inj. auf Kanten und Flächen, die v enthalten, ist, kann man durch Induktion über die Länge des Weges zeigen: Für jeden reduz. Weg p in C ex <u>eind.</u> reduz. Weg p' in C' mit $f(p') = p$. Ist jetzt p' geschl. Weg an v' in C', derart dass $f(p') = \partial(D)$ für eine Fläche D in C, dann ex $D' \in C'$ mit $f(D') = D$ und $p' = \partial(D')$ wegen der Eind. D.h. f^* ist inj.

<u>Prop</u> 1.12 Ist C zsh 1-Komplex, $v \in C^0$, $H \leq \pi(C, v)$. Dann ex. zsh. 1-Komplex C' und Überd. $f: C' \to C$, so dass für $v' \in C'^0$ mit $f(v') = v$ ~~gilt~~ ~~[illegible]~~ die ~~Abb~~ $f^*: \pi(C', v') \to \pi(C, v)$ einen Isom. von $\pi(C', v')$ auf $H \leq \pi(C, v)$ induz.

Bew Sei T Spannbaum in C, d.h. für alle $x \in C^0$ ex eind. Weg $\overline{vx}$ in T von v nach x und sei p_e der geschlossene Weg durch $e \in C^1$.

Sei $W = {}_H\backslash^{\pi(C,v)} = \{Hg \mid g \in \pi(C,v)\}$.

Setze $C'^0 = C^0 \times W$ und

$C'^1 = C^1 \times W$, wobei $\alpha(e, Hg) = (\alpha(e), Hg)$

$\omega(e, Hg) = (\omega(e), Hg\,p_e)$.

Damit ist C' ein 1-Komplex und die Proj. von C' auf C def. eine Überdeckung.

Setze $v' = (v, H)$, dann ist $f(v') = v$.

Wir zeigen $f^*(\pi(C', v')) \leq H$: Ist $p' = e_1' \ldots e_n'$ ein geschl. Weg in C', der in v' beginnt und endet, dann ist $e_i' = (e_i, Hg_i)$ und es folgt $Hg_{i+1} = Hg_i p_{e_i}$.

Weil p' in $v' = (v, H)$ endet, folgt, dass jeder geschl. Weg in C' an v' auf einen Weg abgebildet wird, der ein Elt. in H repräsentiert.

Umgekehrt wird jeder geschl. Weg ~~an~~ H durch einen Weg in C' unter f getroffen (wie in Satz 1.11.)

Kor 1.13 Jede Ugr einer freien Gr. ist frei.

Bew: Sei $F = \langle X \mid \emptyset \rangle$ eine freie Gr., $H \leq F$. Dann ex 1-Komplex C für F und ein 1-Komplex C' mit $\pi(C', v') \simeq H \leq F$. Nun folgt die Beh. aus Prop. 1.4.