(ii) $w \equiv ab$, falls w reduz. Prod. von a, b

(iii) Sei R symm., $r_1 \neq r_2 \in R$. Wenn es Worte $b, c_1, c_2 \in F$ gibt mit $r_1 \equiv bc_1$, $r_2 \equiv bc_2$, dann heißt b 'Stück' in R.

<u>Def</u> 2.10 Sei $G = \langle X \mid R \rangle$, R symm.

$C'(\lambda)$ Ist b Stück in R, $r \in R$, $r \equiv bc$
$\Rightarrow |b| < \lambda |r|$

$C(p)$ Kein $r \in R$ ist Produkt von weniger als p Stücken

<u>Bem</u> 2.11 Offensichtlich gilt $C'(\lambda) \Rightarrow C(p)$ für $\lambda \leq \frac{1}{p-1}$.

<u>Def</u> 2.12 Sei M Karte. Dann heißt $D \in M^2$ <u>Randregion</u>, falls $\partial D \cap \partial M \neq \emptyset$ (Vertex oder Kante).
Ist D keine Randregion, dann heißt D innere Region, entspr. für Vertices, Kanten.
Ist $v \in M^0$, dann ist $d(v) = \# \{ e \in M^1 \mid \alpha(e) = v \}$.
Ist $D \in M^2$, dann ist $d(D) = \#$ Kanten in ~~R~~ Randzykel von D.
und $i(D) = \#$ innere Kanten in Randzykel von D.
Achtung: Wenn eine Kante mehrfach im Randzykel vorkommt, wird sie entspr. ihrer Vorkommen mehrfach gezählt.

<u>Bem</u> Nach Konstruktion haben unsere Karten keine inneren Vertices von Grad 1.
Wir können auch annehmen, dass alle inneren Vertices Grad ≥ 3 haben. (Entferne Vertices von Grad 2 und ändere die Kantenfärbung.)

<u>Lemma</u> 2.13 Sei R symmetrisch, M reduz. R-Diagr. Wenn R die Bed. $C(k)$ erfüllt, dann ist
$d(D) \geq k$ für alle $D \in M^2$ mit $\partial D \cap \partial M$ enth. keine Kante.

<u>Bew</u>: Sei $D \in M^2$ so, dass $\partial D \cap \partial M$ keine Kante enth. Da M reduz. ist und alle inneren Vertices Grad ≥ 3 haben, entsprechen innere Kanten Stücken in R. Aus $C(k)$ folgt daher die Beh.

<u>Satz</u> 2.14 Sei M eine zsh., einf. zush. Karte. Dann gilt für p, q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$:

(i) $$p = \sum^{\bullet} (p - d(v)) + \sum^{\circ} (p - d(v)) + \frac{p}{q} \sum (q - d(D)) - \frac{p}{q} E^{\bullet}$$

(ii) $$p = \sum^{\bullet} \left(\frac{p}{q} + 2 - d(v)\right) + \sum^{\circ} (p - d(v)) + \frac{p}{q} \sum (q - d(D)) + \frac{p}{q} (V^{\bullet} - E^{\bullet}).$$

Hierbei ist $^{\bullet}$ Rand- und $^{\circ}$ innere Vertices etc.

<u>Bew</u> Für einen plan. Gph gilt nach Eulers Formel (ohne die Umgebungsfl.)

$$1 = V - E + F$$

Es ist

$$2E = \sum' d(v) = \sum' d(D) + E^\circ$$

$$\Rightarrow \quad 2nE = n \sum' d(D) + nE^\circ$$

$$\Rightarrow \quad 2(n+1) = 2(n+1)V - 2E - \cancel{2E} + 2(n+1)F - 2nE$$

$$= \underbrace{2(n+1)V - \sum' d(v)}_{} + \underbrace{2(n+1)F - n\sum' d(D)}_{} - nE^\circ$$

Weil $V = \#$ Vert.,
$F = \#$ Flächen, gilt

$$2(n+1) = \sum' \left(2(n+1) - d(v)\right) + n \sum' \left(\frac{2(n+1)}{n} - d(D)\right) - nE^\circ$$

$$\underset{(*)}{=} \sum'^{\circ} \left(2(n+1) - d(v)\right) + \sum'^{\circ} \left(2(n+1) - d(v)\right)$$
$$+ n \sum' \left(\frac{2(n+1)}{n} - d(D)\right) - nE^\circ$$

Setze $p = 2(n+1)$, $q = \frac{2(n+1)}{n}$.

Dann ist $n = \frac{p}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ und

$$\frac{p+2}{2} = \frac{p}{q} + 2 = \frac{p}{2} + 1.$$

Daher ergibt sich aus (*)

$$p = \underbrace{\sum_i^{\circ}(p-d(v))}, + \sum_i^{\circ}(p-d(v)) + \frac{p}{q}\sum_i(q-d(D)) - \frac{p}{q}E^{\circ}$$

Es ist $p = n+2+n$ und daher

$$p = \sum_i^{\circ}(n+2q-d(v)) + \sum_i^{\circ} n + \sum_i^{\circ} \dots$$

$$= \sum_i^{\circ}\left(\frac{p}{q}+2-d(v)\right) + \sum_i^{\circ}(p-d(v)) + \frac{p}{q}\sum_i(q-d(D))$$

$$+ \frac{p}{q}(V^{\circ}-E^{\circ}).$$

Bem: Offensichtlich gilt für Karten ohne isol. Vertices $V^{\circ} \le E^{\circ}$ (mit Vielfachheit gezählt.)

Def 2.15 Eine Karte heißt (q,p) Karte, wenn alle inneren Vert. Grad $\ge q$ und alle inneren Reg. Grad $\ge p$ haben. (Interessant: $q=3$, $p=6$)
Eine Karte heißt $[p,q]$ Karte, wenn alle inneren Vertices Grad $\ge p$, alle Gebiete Grad $\ge q$ haben.

Kor 2.16 Sei M eine einf. zsh, zsh. $[p,q]$ mit mehr als einem Vertex. Dann gilt

$$\sum_i^{\circ}\left[\frac{p}{q}+2-d(v)\right] \ge p.$$

Bew: Klar.

Kor. 2.17 Sei M einf. zsh, zsh (q,p)-Karte mit mehr als einer Region.
Dann gilt für $i(D) = \#$ inn. Kanten in ∂D:

$$\sum^{\circ}\left(\frac{p}{q} + 2 - i(D)\right) \geq p.$$

Bew: Betrachte die zu M duale Karte M^*:
Für $D_i \in M^2$, wähle v_i^* im Inneren von D_i als Vertices von M^*. Wenn $\partial D_1 \cap \partial D_2$ eine Kante enthält, setze e^* Kante von v_1^* nach v_2^*.
Die Regionen in ~~diesem~~ M^* sind die beschr. Gebiete in diesem Gph.
Dann gilt: Die Vertices von M^* entspr. Reg. in M
Die Kanten in M^* entspr. inn. Kanten in M
Die Regionen in M^* entspr. inneren Vertices in M.
und $d(D^*) = d(v)$.

Daher gilt: Ist M eine (q,p)-Karte, dann ist M^* eine $[p,q]$-Karte und wir können 2.16 anwenden. Wegen $i(D) = d(v^*)$ folgt die Beh.

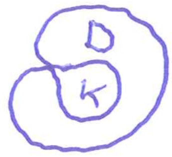
Bem: Aus 2.17 folgt, dass es in einer (q,p)-Karte Randgebiete mit wenigen inneren Kanten geben muss. Aber für Dehn-Präsent.

muss die äußere Kante ein langes zsh. Stück sein!

Ziel: $\sum^*\left[\frac{p}{q}+2-i(D)\right]\geq p$, wobei Σ^* nur über Randgebiete mit zsh Rand $\partial D\cap\partial M$ gerechnet wird.

Lemma 2.18 Ist M zsh (q,p)-Karte und $d(D)\geq p$ für alle D mit $\partial D\cap\partial M$ ohne Kante, dann ist der Rand jeder Region ein einf. geschl. Weg.

Bew: Sei $D\in M^2$, η ein geschl. Weg echt enth. in ∂D. Dann erhalten wir eine einf. zsh. Teilkarte K von M mit $\partial K=\eta$.



Wähle D,η so, dass # Flächen von K min. Dann enthält η höchstens einen Vertex $v_0\in\partial K\cap\partial M$, d.h. alle anderen Vert. in K sind innere Vert. von M und haben Grad $\geq q$. Weil $\eta\cap\partial M$ keine Kante enth., hat keine Fläche von K Randfl. in M, d.h. alle Gebiete in K haben Grad $\geq p$, d.h. K ist $[q,p]$. Weil K nicht nur ~~aus~~ einen Vertex haben kann wegen (q,p)-Bed. gilt nach 2.16

$$\sum_K^{\bullet}\left(\frac{q}{p}+2-d(v)\right)\geq q,$$ aber nur v_0