Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Dr. Martin Bays
Tim Clausen

Wintersemester 2019/2020
Samstag, 08.08.2020

Klausur zur Vorlesung: Modelltheorie

Name: ....

Vorname: ....

Geburtsdatum: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Sitzplatz: ....

Bearbeiten Sie 4 der 5 Aufgaben. Wenn Sie alle 5 Aufgaben bearbeiten, machen Sie deutlich, welche 4 Aufgaben gewertet werden sollen. Ansonsten werden die ersten 4 Lösungen gewertet. In jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.
Die Prüfung dauert 3 Stunden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1. Es sei T eine vollständige $\mathcal{L}$-Theorie mit unendlichen Modellen.

a) Definieren Sie den Begriff *κ-saturiert* für eine unendliche Kardinalzahl κ. *(2 Punkte)*

b) Es seien $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$, $|\mathcal{M}| = |\mathcal{N}| \geq \aleph_0$ und sowohl $\mathcal{M}$ als auch $\mathcal{N}$ seien saturiert. Zeigen Sie $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$. *(4 Punkte)*

Erinnerung: Eine unendliche Struktur $\mathcal{M}$ heißt *saturiert*, wenn sie $|\mathcal{M}|$-saturiert ist.

c) Es sei $\mathcal{M} \models T$ saturiert und $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{M}^n$. Zeigen Sie, dass $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b})$ genau dann gilt, wenn es einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{M})$ gibt, sodass $\alpha(\bar{a}) = \bar{b}$. *(4 Punkte)*

Aufgabe 2. Es sei T_{ZG} die Theorie des Zufallsgraphen in der Sprache $\mathcal{L}_R = \{R\}$. (Beachten Sie den Hinweis unten.) Es sei $\mathcal{N} = (N, R) \models T_{\text{ZG}}$ und $v \in N$. Sei $M = N \setminus \{v\}$ und $\mathcal{M} = (M, R|_M)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{N}$ ist. *(2 Punkte)*

b) Definieren Sie den Begriff *Vaughtsches Paar*. *(1 Punkt)*

c) Folgern Sie aus (a), dass T_{ZG} ein Vaughtsches Paar besitzt. *(3 Punkte)*

d) Beweisen Sie (z.B. durch Vereinigung einer Kette abzählbarer Modelle), dass es ein überabzahlbares Modell $\mathcal{M}' \models T_{\text{ZG}}$ und eine $\mathcal{L}_R(\mathcal{M}')$-Formel $\phi(x)$ gibt, sodass $|\phi(\mathcal{M}')| = \aleph_0$ gilt. *(4 Punkte)*

Hinweis: T_{ZG} ist durch folgende Aussagen axiomatisiert:

- R ist symmetrisch und irreflexiv;
- Für je zwei disjunkte endliche Teilmengen X und Y existiert ein Element $z \notin X \cup Y$, welches mit allen $x \in X$ in Relation (bzgl. R) steht, jedoch mit keinem $y \in Y$.

Sie dürfen benutzen, dass T_{ZG} Quantorenelimination besitzt und sowohl vollständig als auch $\aleph_0$-kategorisch ist.

Aufgabe 3.

a) Definieren Sie, wann eine vollständige $\mathcal{L}$-Theorie *streng minimal* ist. *(2 Punkte)*

b) Es sei T eine vollständige abzählbare streng minimale $\mathcal{L}$-Theorie mit unendlichen Modellen. Zeigen Sie:

i) T eliminiert $\exists^\infty$, d.h. für jede $\mathcal{L}$-Formel $\phi(x, \bar{y})$ gibt es ein $k_\phi < \omega$, sodass

$$|\phi(\mathcal{M}, \bar{b})| \leq k_\phi \iff |\phi(\mathcal{M}, \bar{b})| < \aleph_0$$

für alle $\mathcal{M} \models T$ und alle $\bar{b} \in \mathcal{M}^{|\bar{y}|}$. *(2 Punkte)*

ii) Es sei $A \subseteq \mathcal{M} \models T$. Dann gibt es einen eindeutigen nicht-algebraischen Typen in $S_1(A)$. *(3 Punkte)*

iii) Es sei $A \subseteq \mathcal{M} \models T$. Dann ist jeder Typ $p(x) \in S_1(A)$ *definierbar*; d.h. für jede $\mathcal{L}$-Formel $\phi(x, \bar{y})$ gibt es eine $\mathcal{L}(A)$-Formel $\theta_\phi(\bar{y})$, sodass für alle $\bar{b} \in A^{|\bar{y}|}$ gilt

$$\phi(x, \bar{b}) \in p(x) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \theta_\phi(\bar{b}).$$

(3 Punkte)

Aufgabe 4. Es sei $\mathcal{L} = \{R_1, R_2\}$, wobei R_1 und R_2 binäre Relationssymbole seien. Es sei T die folgende Theorie:

- R_1 und R_2 sind Äquivalenzrelationen,
- $\forall x, y\ (xR_1y \to xR_2y)$,
- R_1 und R_2 besitzen jeweils unendlich viele Äquivalenzklassen,
- jede R_1-Äquivalenzklasse ist unendlich,
- jede R_2-Äquivalenzklasse besteht aus unendlich vielen R_1-Äquivalenzklassen.

Zeigen Sie:

a) T hat Quantorenelimination (in $\mathcal{L}$) und ist vollständig, *(5 Punkte)*

b) T ist nicht $\aleph_1$-kategorisch. *(2 Punkte)*

c) T besitzt genau $2^{\aleph_0}$ Modelle von Mächtigkeit $\aleph_1$ bis auf Isomorphie. *(3 Punkte)*

Hinweis: Sie dürfen die Quantorenelimination mittels eines beliebigen Kriteriums aus der Vorlesung zeigen.

Aufgabe 5. Es sei T eine vollständige abzählbare Theorie.

a) Definieren Sie, wann ein Modell *atomar* ist und wann es *prim* ist. *(2 Punkte)*

b) Es sei $\mathcal{M} \models T$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ genau dann ein Primmodell von T ist, wenn $\mathcal{M}$ abzählbar und atomar ist. *(5 Punkte)*

Hinweis: Sie dürfen den Typenvermeidungssatz ohne Beweis benutzen.

c) Beschreiben Sie eine vollständige abzählbare Theorie ohne Primmodell. Begründen Sie Ihre Antwort. In diesem Aufgabenteil dürfen Sie beliebige Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis darlegen und benutzen. *(3 Punkte)*

Hinweis: Betrachten Sie 2^ω.