Seminar zur Algebraischen Geometrie II

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 2 vom 27. April 2009

Thema 1 (Radikale in graduierten Ringen)**.** Sei $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ein graduierter Ring.

1. Sei $S \subset A$ eine mulitplikativ abgeschlossene Teilmenge mit $0 \notin S$. Zeigen Sie, dass es ein graduiertes Primideal in A gibt, das kein Element aus S enthält.

2. Folgern Sie: Ist $f \in A_+$, so ist $D_+(f)$ genau dann leer, wenn f nilpotent ist. Die Menge $\operatorname{Proj} A$ ist genau dann leer, wenn alle Elemente aus A_+ nilpotent sind.

3. Sei $\mathfrak{a}$ ein graduiertes Ideal von A mit $\mathfrak{a} \subset A_+$ und sei $P_\mathfrak{a}$ die Menge aller graduierten Primideale von A, die $\mathfrak{a}$ enthalten. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{rad}_+ \mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P_\mathfrak{a}} \mathfrak{p} \cap A_+.$$

   Hinweis. Reduzieren Sie dies auf den Fall, dass $\mathfrak{a}$ das Nullideal ist.

4. Folgern Sie, dass die Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von $\operatorname{Proj} A$ bijektiv den graduierten Idealen $\mathfrak{a}$ von A mit $\mathfrak{a} \subset A_+$ und $\mathfrak{a} = \operatorname{rad}_+ \mathfrak{a}$ entsprechen.

Thema 2 (Proj, Spec und $\mathbb{P}$)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

1. Zeigen Sie, dass es einen kanonischen Isomorphismus $\operatorname{Proj} R[T] \cong \operatorname{Spec} R$ gibt, wobei der Polynomring $R[T]$ durch den Grad von Polynomen graduiert sei.

2. Allgemeiner: Skizzieren Sie für $n \in \mathbb{N}$ warum $\operatorname{Proj} R[T_0, \dots, T_n]$ und $\mathbb{P}^n_R$ kanonisch isomorphe Schemata sind, wobei der Polynomring $R[T_0, \dots, T_n]$ mit der durch den Totalgrad gegebenen Graduierung versehen sei. Erklären Sie insbesondere, welche Rolle das irrelevante Ideal $R[T_0, \dots, T_n]_+$ spielt.

3. Folgern Sie: Ist R nicht der Nullring und $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist das Schema $\operatorname{Proj} R[T_0, \dots, T_n]$ nicht affin.

4. Gibt es zu jedem Schema X einen geeigenten graduierten Ring A, so dass $\operatorname{Proj} A$ und X isomorph sind?

5. Ist $\operatorname{Proj} A$ für jeden graduierten Ring A eine offene Teilmenge von $\operatorname{Spec} A$?

Besprechung am 6. Mai 2009