Seminar zur Algebraischen Geometrie II

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 3 vom 4. Mai 2009

Thema 1 (Assoziierte Garben graduierter Moduln). Sei $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ein graduierter Ring, seien M, N graduierte A-Moduln, und seien $\widetilde{M}$ bzw. $\widetilde{N}$ die assoziierten Garben auf $X := \operatorname{Proj} A$.

1. Zeigen Sie, dass es kanonische Homomorphismen
$$\lambda\colon \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N} \longrightarrow (M \otimes_A N)^\sim$$
$$\mu\colon \bigl(\operatorname{Hom}_A(M,N)\bigr)^\sim \longrightarrow \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N})$$
von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben gibt.

2. Zeigen Sie, dass λ ein Isomorphismus ist, wenn A_+ von A_1 erzeugt wird.

3. Sei $n \in \mathbb{Z}$ und sei A_+ von A_1 erzeugt. Zeigen Sie, dass es einen kanonischen Isomorphismus $(M(n))^\sim \cong \widetilde{M}(n)$ gibt.

4. Zeigen Sie, dass μ ein Isomorphismus ist, falls der graduierte A-Modul M von endlicher Präsentation ist und A_+ von A_1 erzeugt wird.

Hinweis. Weitere Informationen finden Sie in A. Grothendiecks „Éléments de géométrie algébrique II“ (2.5.11ff).

Thema 2 (Die Gruppe der invertierbaren Garben). Sei X ein Schema. Zeigen Sie, dass die Menge der invertierbaren Garben auf X modulo Isomorphie eine Gruppe bildet, wobei die Verknüpfung durch das Tensorprodukt gegeben ist.

Thema 3 (Aufblasungen). Sei X ein Schema, sei Y ein abgeschlossenes Unterschema von Y und sei I die zu Y gehörige quasi-kohärente Idealgarbe auf X. Die *Aufblasung von I in X* ist der kanonische Morphismus $\operatorname{Proj} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n \longrightarrow X$.

1. Beschreiben Sie die Konstruktion der Aufblasung von I in X.

2. Welche universelle Eigenschaft besitzt die Aufblasung von I in X?

3. Was passiert, wenn man I durch eine nichttriviale Potenz I^n ersetzt? Was passiert, wenn I eine invertierbare Garbe ist? Kann die Aufblasung von I in X leer sein, wenn X nichtleer und I nicht das Nullideal ist?

4. Beschreiben Sie die Aufblasung eines endlich erzeugten Ideals in einem affinen Schema durch Gleichungen.

5. Beschreiben Sie die Aufblasung des Nullpunkts in der affinen Ebene $\mathbb{A}^2_K$ eines Körpers K geometrisch. Welchen fundamentalen Unterschied gibt es zwischen der Kurve $K[X,Y]/(Y^2 - X^2 \cdot (X+1))$ in $\mathbb{A}^2_K$ und dem Urbild dieser Kurve in der Aufblasung des Nullpunkts in der affinen Ebene $\mathbb{A}^2_K$?

Hinweis. Mehr über Aufblasungen finden Sie im Buch „Algebraic Geometry“ von R. Hartshorne (S. 160ff und S. 28ff), in „Algebraic Geometry and Arithmetic Curves“ von Q. Liu (Kapitel 8.1), in „The Geometry of Schemes“ von D. Eisenbud und J. Harris (Kapitel IV.2), in „Éléments de géométrie algébrique II“ von A. Grothendieck (Kapitel 8) und auf http://tinyurl.com/caf4dp.

Wenn Sie möchten können Sie sich auf den Fall beschränken, dass X ein affines Schema ist.

Besprechung am 13. Mai 2009