Seminar zur Algebraischen Geometrie II

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 4 vom 11. Mai 2009

Thema 1 (Getwistete Garben auf $\mathbb{P}^1$). Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Bestimmen Sie die Übergangsfunktionen des Geradenbündels $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(n)$ auf der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1_R \cong \operatorname{Proj} R[T_0, T_1]$ bezüglich der offenen Überdeckung $(D_+(T_j))_{j\in\{0,1\}}$ und einer geeigneten Trivialisierung.

2. Sei M das Möbiusband, aufgefasst als (geometrisches) Geradenbündel über der reell-projektiven Gerade $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^1$. Sei $V_0 := \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) - \{(0:1)\}$ und $V_1 := \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) - \{(1:0)\}$. Dann ist $(V_j)_{j\in\{0,1\}}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ und M ist trivial über V_0 und V_1. Sei $M(n) := M^{\otimes n}$, d.h. $M(n)$ ist das $(n-1)$-fach verdrillte Möbiusband.

   Bestimmen Sie die Übergangsfunktionen des geometrischen Geradenbündels $M(n)$ bezüglich der offenen Überdeckung $(V_j)_{j\in\{0,1\}}$ und vergleichen Sie diese mit den Übergangsfunktionen aus Teil 1.

3. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist das Geradenbündel $M(n)$ über $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ trivial? Vergleichen Sie dies mit der algebraischen Situation.

4. Sei $W_0 := D_+(T_0)$ und $W_1 := D_+(T_0 + T_1)$ in $\operatorname{Proj} \mathbb{Z}/2[T_0, T_1] \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/2}$; dann ist $W := (W_0, W_1)$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/2}$. Welche invertierbare Garbe auf $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/2}$ erhält man durch den alternierenden Kozykel $\eta \in C^1_a(\mathcal{O}^\times_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/2}}; W)$ mit
$$\eta_{01} = \frac{T_0}{T_0 + T_1} + \frac{T_1^2}{T_0 \cdot (T_0 + T_1)} \ ?$$

Thema 2 (Grothendieck-Topologien, Garben und Darstellbarkeit).

1. Was ist eine Grothendieck-Topologie? Erklären Sie insbesondere, wie man gewöhnliche Topologien als Grothendieck-Topologien auffassen kann.

2. Führen Sie die Grothendieck-Topologien zar, fpqc und fppf auf der Kategorie der Schemata über einem gegebenen Basisschema ein (und skizzieren Sie, warum dadurch tatsächlich Grothendieck-Topologien definiert werden). Geben Sie insbesondere eine kurze Einführung in treuflache Morphismen und ihre Eigenschaften.

3. Was ist eine Prägarbe bzw. eine Garbe auf einer Grothendieck-Topologie?

4. Sei S ein Schema. Skizzieren Sie, warum jeder darstellbare kontravariante Funktor $\mathbf{Sch}_S \longrightarrow \mathbf{Set}$ bezüglich fpqc, fppf und zar eine Garbe ist.

5. Geben Sie die universelle Eigenschaft der Garbifizierung von Prägarben auf Grothendieck-Topologien an und deuten Sie die Konstruktion der Garbifizierung an.

Hinweis. Die Definition von zar, fpqc, fppf und den Satz über Darstellbarkeit finden Sie im Buch „Néron Models" von S. Bosch, W. Lütkebohmert und M. Raynaud (Kapitel 8.1). Mehr zu Grothendieck-Topologien finden Sie im Buch „Topos Theory" von P.T. Johnstone (Kapitel 0.3) bzw. im Buch „Sheaves in geometry and logic" von S. MacLane und I. Moerdijk (Kapitel III).

Besprechung am 20. Mai 2009