

Seminar zur Algebraischen Geometrie II

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh

Blatt 5 vom 18. Mai 2009

Thema 1 (Dimension affiner Räume).

1. Beweisen Sie das Noethersche Normalisierungslemma (*Skript*^{0.5}: *Theorem 3.2/1*).
2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Noetherschen Normalisierungslemmas die Dimension von \mathbb{A}_K^n , wobei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ ist.
Hinweis. Dies wird zum Beispiel in D. Eisenbuds Buch „Commutative algebra with a view toward algebraic geometry“ (Theorem 13.1) erklärt.
3. Welche Dimension hat $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$?

Thema 2 (Mehr über projektive Räume). Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Ist \mathbb{P}_K^n irreduzibel?
2. Ist \mathbb{P}_K^n integer?
3. Welche Dimension hat \mathbb{P}_K^n ?

Thema 3 (Varietäten). Geben Sie eine kurze Einführung in Varietäten. Genauer: Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1. Führen Sie algebraische Mengen, (klassische) affine Varietäten und (klassische) Varietäten über K ein.
2. Definieren Sie den Begriff der Varietät über K via Schemata.
3. Zeigen Sie, dass die beiden Versionen von Varietäten über K (zusammen mit den entsprechenden Morphismen) zu äquivalenten Kategorien führen.
4. Sei $K_0 \subset K$ ein Teilkörper mit der Eigenschaft, dass K ein algebraischer Abschluss von K_0 ist. Wann ist eine Varietät bereits „über K_0 definiert“? Beschreiben Sie kurz den Zusammenhang zu K_0 -Strukturen.
5. Welche (vermuteten) Zusammenhänge gibt es zwischen den \mathbb{Z} -wertigen, den \mathbb{Q} -wertigen, den $\overline{\mathbb{Q}}$ -wertigen, den \mathbb{C} -wertigen, den \mathbb{F}_p -wertigen und den $\overline{\mathbb{F}_p}$ -wertigen Punkten einer über \mathbb{Z} (bzw. \mathbb{Q}) definierten Varietät? (Stichpunkte genügen).

Hinweis. Der Zusammenhang zwischen (klassischen) Varietäten und Schemata ist in D. Mumfords Buch „The Red Book of Varieties and Schemes“ (Kapitel II.3 und II.4) dargestellt. Ein kurzer Überblick zum letzten Aufgabenteil findet sich auf <http://www.warwick.ac.uk/~maseap/arith/notes/picard.pdf>.

Besprechung am 27. Mai 2009