Seminar zur Algebraischen Geometrie II

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh Blatt 9 vom 29. Juni 2009

Thema 1 (Eine äquivalente Charakterisierung ampler Garben)**.** Sei X ein quasi-kompaktes und quasi-separiertes Schema über einem Ring R. Sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und sei A der graduierte Ring $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

– Die Garbe $\mathcal{L}$ ist ample (im Sinne der Vorlesung).

– Die Menge $\{X_f \mid f \in A_+ \text{ homogen}\}$ ist eine Basis der Topologie von X.

– Es gilt
$$\bigcup \{X_f \mid f \in A_+ \text{ homogen}, X_f \text{ affin}\} = X.$$

Hinweis. Mehr zu dieser Charakterisierung finden Sie in A. Grothendiecks „Éléments de géométrie algébrique II“ (Théorème 4.5.2) und im Skript zur Vorlesung (*Skript*$^{0.6}$*: S. 305*).

Thema 2 (Universelle Eigenschaft der Aufblasung)**.** Beweisen Sie die universelle Eigenschaft der Aufblasung. Genauer: Sei X ein Schema, sei Y ein abgeschlossenes Unterschema und sei I die zu Y gehörige Idealgarbe auf X. Sei $\widetilde{X} := \operatorname{Proj} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n$. Die Aufblasung von Y (bzw. I) in X ist der kanonische Morphismus $\pi \colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ (s. Thema 3 von Blatt 3).

Zeigen Sie, dass die Aufblasung $\pi \colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ die folgende universelle Eigenschaft besitzt, falls I endlich erzeugt ist: Ist $\varphi \colon Z \longrightarrow X$ ein Morphismus von Schemata mit der Eigenschaft, dass $\varphi^{-1} I \cdot \mathcal{O}_Z$ eine invertierbare Idealgarbe auf Z ist, so gibt es genau einen Morphismus $\widetilde{\varphi} \colon Z \longrightarrow \widetilde{X}$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.
Hinweis. Die nötigen Argumente finden sich zum Beispiel in R. Hartshornes Buch „Algebraic Geometry“ (Proposition II.7.14).

Besprechung am 8. Juli 2009