

Seminar zur Algebraischen Geometrie I

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh

Blatt 1 vom 13. Oktober 2008

Thema 1 (Kategorien und Funktoren). Referieren Sie über die Grundlagen von Kategorien und Funktoren (*Skript*^{0.2}: Kapitel 1.10). Illustrieren Sie dabei alle eingeführten Begriffe an Beispielen!

Übungsmaterial.

- Wie kann man aus einer partiellen Ordnung eine Kategorie erhalten?
- Gibt es einen Funktor $F: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbb{R}\text{-Vekt}$ von der Kategorie der Mengen in die Kategorie der \mathbb{R} -Vektorräume, der

$$X \cong Y \iff F(X) \cong F(Y)$$

für alle Mengen X, Y erfüllt?

- Sei C eine Kategorie mit der Eigenschaft, dass $\text{Hom}_C(X, Y)$ für alle Objekte X und Y eine Teilmenge der Menge der mengentheoretischen Abbildungen $X \rightarrow Y$ bildet und dass die Verknüpfung in C durch die gewöhnliche Komposition gegeben ist. Sind dann zwei Objekte genau dann in C isomorph, wenn es eine Bijektion zwischen den Mengen X und Y gibt?
- Sei C eine Kategorie und S ein Objekt in C . Wie hängen Faserprodukte über S mit Produkten in der Kategorie C_S der Objekte über S zusammen?

Thema 2 (Lokalisierungen von Ringen). Geben Sie eine erste Einführung in Lokalisierungen von Ringen (*Skript*^{0.2}: Kapitel 1.2: S. 14–17).

Übungsmaterial.

- Sei $R = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $x \in \mathbb{R}$. Geometrisch ist die lokale Information von R am Punkt x im Ring

$$R_x := R/U(x)$$

enthalten, wobei das Ideal $U(x)$ als die Menge aller stetigen Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist, die in einer Umgebung von x verschwinden; d.h. in R_x werden Funktionen identifiziert, die in einer Umgebung von x übereinstimmen.

Zeigen Sie, dass R_x zur Lokalisierung $R_{S(x)}$ mit

$$S(x) := \{f \in R \mid f(x) \neq 0\}$$

isomorph ist.