

Homologie I

Sarah Humberg

19. Mai 2010

In diesem Vortrag führen wir zunächst den Begriff der Homologietheorie ein, mit dessen Hilfe wir im Anschluss zwei interessante Tatsachen erstaunlich knapp beweisen können. Im letzten Abschnitt konstruieren wir die Simpliciale Homologie und finden einen neuen Weg die Eulercharakteristik eines topologischen Raumes zu berechnen.

1 Axiomatische Definition von Homologie

Definition 1.1. Definiere die Kategorie \mathbf{TOP}^2 : Objekte sind Paare (X, A) von topologischen Räumen, d.h. ein topologischer Raum X mit einer Teilmenge $A \subseteq X$, versehen mit der Teilraumtopologie. Ein Morphismus $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(A) \subseteq B$.

Zwei Morphismen $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ heißen *homotop*, $f \simeq g$, falls eine stetige Abbildung $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ existiert mit $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$ und $H(A \times [0, 1]) \subseteq B$.

(X, A) und (Y, B) heißen *homotopieäquivalent*, $(X, A) \simeq (Y, B)$, falls stetige Abbildungen $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ und $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$ existieren mit $f \circ g \simeq id_{(Y, B)}$ und $g \circ f \simeq id_{(X, A)}$.

Definition 1.2. Eine *Homologietheorie* $H_* = (H_*, \partial_*)$ mit Werten in $\mathbb{F}_2\text{-VR}$ ist eine Folge kovarianter Funktoren $H_n : \mathbf{TOP}^2 \rightarrow \mathbb{F}_2\text{-VR}$, $n \in \mathbb{Z}$, zusammen mit einer Folge natürlicher Transformationen $\partial_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, \emptyset)$, $n \in \mathbb{Z}$, sodass folgende Axiome erfüllt sind:

1. *Homotopieaxiom.*

Sind $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotop, so folgt $\underbrace{H_n(f)}_{=:f_*} = \underbrace{H_n(g)}_{=:g_*} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

2. *Lange exakte Sequenz von Paaren.*

Für jedes Paar (X, A) ist folgende nach beiden Seiten unendlich lange Sequenz exakt:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}(X,A)} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X,A)} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

wobei $i : A \hookrightarrow X$ und $j : X := (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusionen bezeichnen.

Die Abbildung $\partial_n(X, A)$ heißt *Randoperator*.

3. *Ausschneidung.*

Seien $A \subseteq B \subseteq X$ Unterräume sodass $\bar{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$. Dann induziert die Inklusion $i : (X \setminus A, B \setminus A) \hookrightarrow (X, B) \forall n \in \mathbb{Z}$ Isom. $i_* : H_n(X \setminus A, B \setminus A) \xrightarrow{\cong} H_n(X, B)$.

4. *Dimensionsaxiom.*

$$H_n(\{*\}) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für jeden Einpunktraum $\{*\}$.

5. *Additivität.*

Sei $(X_i, A_i)_{i \in I}$ Folge von top. Paaren, $j_i : (X_i, A_i) \hookrightarrow (\dot{\bigcup} X_i, \dot{\bigcup} A_i)$ die kanonische Inklusion.

Dann ist $\bigoplus H_n(X_i, A_i) \xrightarrow[\cong]{\bigoplus (j_i)_*} H_n(\dot{\bigcup} X_i, \dot{\bigcup} A_i)$ ein Isomorphismus.

Bemerkung 1.3. Aus dem Homotopieaxiom folgt:

$(X, A) \simeq (Y, B) \Rightarrow H_n(X, A) \cong H_n(Y, B)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Satz 1.4 (Mayer-Vietoris-Sequenz).

Sei X top. Raum, $X_1, X_2 \subseteq X$ mit $X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$, $A \subseteq X_0 := X_1 \cap X_2$, betrachte die Inklusionen

$$\begin{array}{ccc} (X_0, A) & \xrightarrow{i_1} & (X_1, A) \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ (X_2, A) & \xrightarrow{j_2} & (X, A) \end{array}$$

Es gibt natürliche Homomorphismen $r_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(X_0, A)$ sodass folgende Sequenz exakt ist:

$$\dots \rightarrow H_n(X_0, A) \xrightarrow{(i_1)_* \oplus (i_2)_*} H_n(X_1, A) \oplus H_n(X_2, A) \xrightarrow{(j_1)_* - (j_2)_*} H_n(X, A) \xrightarrow{r_n} H_{n-1}(X_0, A) \rightarrow \dots$$

Diese heißt Mayer-Vietoris-Sequenz.

2 Beispiele von Berechnungen und Anwendungen

Wir können nun die Homologiegruppen der d -dimensionalen Sphäre berechnen und betrachten zwei weitere wichtige Anwendungen von Homologie. Dabei vertrauen wir darauf dass mindestens eine Homologietheorie existiert, ein konkretes Beispiel werden wir erst in Kapitel 3 kennenlernen.

Beispiel 2.1. Für jeden top. Raum X und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $H_n(X, X) = 0$.

Beweis. Zur Übung. □

Beispiel 2.2 (Homologie der Sphäre S^d).

Für die d -dimensionale Sphäre S^d gilt:

$$H_n(S^d, \{*\}) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & n = d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis. (per Induktion)

IA: Sei $d = 0$. Es ist $S^0 = \{*\} \cup \{*\}$, also:

$$H_n(S^0, \{*\}) = H_n(\{*\} \cup \{*\}, \{*\}) \stackrel{\text{Add.axiom}}{=} \underbrace{H_n(\{*\}, \{*\})}_{=0} \oplus \underbrace{H_n(\{*\}, \emptyset)}_{=: H_n(\{*\})} \stackrel{\text{Dim.axiom}}{=} \begin{cases} \mathbb{F}_2 & n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

IS: $d - 1 \mapsto d$.

Seien $N := (0, \dots, 0, 1)$, $S := (0, \dots, 0, -1)$. Dann ist $S^d = \underbrace{(S^d \setminus \{N\})}_{\text{offen}} \cup \underbrace{(S^d \setminus \{S\})}_{\text{offen}}$.

Sei $\{*\} \in (S^d \setminus \{N\}) \cap (S^d \setminus \{S\}) = S^d \setminus \{N, S\} \simeq S^{d-1}$

Betrachte die Mayer-Vietoris-Sequenz:

$$\dots \rightarrow \underbrace{H_n(S^d \setminus N, \{*\}) \oplus H_n(S^d \setminus S, \{*\})}_{=0} \rightarrow H_n(S^d, \{*\}) \rightarrow \underbrace{H_{n-1}(S^d \setminus \{N, S\}, \{*\})}_{\cong H_{n-1}(S^{d-1}, \{*\})} \rightarrow \underbrace{H_{n-1}(S^d \setminus N, \{*\}) \oplus \dots}_{=0}$$

Also ist $H_n(S^d, \{*\}) \cong H_{n-1}(S^{d-1}, \{*\}) \stackrel{IV}{=} \begin{cases} \mathbb{F}_2 & n - 1 = d - 1 \Leftrightarrow n = d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

□

Bemerkung 2.3.

Es ist $H_0(X) = H_0(X, \{*\}) \oplus \mathbb{F}_2$ und $H_n(X) = H_n(X, \{*\})$ für $n \geq 1$, also z.B.

$$H_n(S^0) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 & n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und für } d \geq 1: H_n(S^d) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & n = 0, d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma 2.4 (Invarianz der Dimension).

Seien $d, e \in \mathbb{N}$. Dann gilt: \mathbb{R}^d und \mathbb{R}^e sind homöomorph $\Leftrightarrow d = e$.

Beweis. .

„ \Leftarrow “ ist trivial.

„ \Rightarrow “: Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$ Homöomorphismus.

Für $x \in \mathbb{R}^d$ induziert f einen Homöom. $\underbrace{\mathbb{R}^d \setminus \{x\}}_{\simeq S^{d-1}} \xrightarrow{\cong} \underbrace{\mathbb{R}^e \setminus \{f(x)\}}_{\simeq S^{e-1}}$.

Also sind S^{d-1} und S^{e-1} homotopieäquivalent und es gilt:

$$\begin{aligned} \underbrace{H_n(S^{d-1}, \{*\})}_{\simeq S^{d-1}} &\cong \underbrace{H_n(S^{e-1}, \{*\})}_{\simeq S^{e-1}} && \Rightarrow d = e \\ = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & n = d - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} &= \begin{cases} \mathbb{F}_2 & n = e - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

□

Satz 2.5 (Brouwerscher Fixpunktsatz).

Jede stetige Abbildung $f : D^d \rightarrow D^d$ von der abgeschlossenen Kreisscheibe auf sich selbst hat mindestens einen Fixpunkt.

Beweis. Annahme: $f(x) \neq x \forall x \in D^d$.

Definiere $r : D^d \rightarrow S^{d-1}$ folgendermaßen: Für $x \in D^d$ sei $r(x)$ der Schnittpunkt des Strahles ausgehend von $f(x)$ durch x mit der S^{d-1} . Dann ist r stetig und eingeschränkt auf S^{d-1} die Identität.

Sei $i : S^{d-1} \hookrightarrow D^d$ die Inklusion, dann ist $r \circ i = id_{S^{d-1}}$.

Also ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} S^{d-1} & \xrightarrow{i} & D^d \\ & \searrow id & \downarrow r \\ & & S^{d-1} \end{array}$$

Aufgrund der Funktoreigenschaften kommutiert dann aber auch folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 \cong H_{d-1}(S^{d-1}, \{*\}) & \xrightarrow{i_*} & H_{d-1}(D^d, \{*\}) \cong \{0\} \\ & \searrow id_* & \downarrow r_* \\ & & H_{d-1}(S^{d-1}, \{*\}) \cong \mathbb{F}_2 \end{array}$$

⚡

□

3 Simpliciale Homologie als Beispiel einer Homologietheorie

Wir werden nun als Beispiel einer Homologietheorie die Simpliciale Homologie für endliche Simpliciale Komplexe konstruieren. Wie wir wissen können wir zu vielen topologischen Räumen eine Triangulierung finden, d.h. einen endlichen Simplicialen Komplex K mit $X \cong |K|$. Die Homologie eines solchen topologischen Raumes kann auf die Homologie seiner Triangulierung zurückgeführt werden, durch einen kleinen Trick ([Mun84], Seite 149) lässt sich erreichen, dass dies von der Wahl der Triangulierung unabhängig ist.

Sei im folgenden K ein endlicher Simplicialer Komplex.

Definition 3.1. • Eine d -Kette c in K (mit Koeffizienten in \mathbb{F}_2) ist eine formale Summe von d -Simplex in K , also $c = \sum a_i \sigma_i$ mit σ_i d -Simplex für alle i , $a_i \in \mathbb{F}_2$.

• $C_d(K) = C_d$ sei die Gruppe der d -Ketten in K (mit komponentenweiser Addition $\sum a_i \sigma_i + \sum b_i \sigma_i = \sum (a_i + b_i) \sigma_i$). Insbesondere ist $C_d(K) = 0$ für $d < 0$ oder $d > \dim(K)$.

• Der Rand $\partial_d \sigma$ eines d -Simplexes σ sei die Summe seiner $(d-1)$ -dimensionalen Seiten, also für $\sigma = \text{conv}(u_0, \dots, u_d)$ sei $\partial_d \sigma := \sum_{j=0}^d \text{conv}(u_0, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_d)$.

• Der Rand $\partial_d c$ einer d -Kette $c = \sum a_i \sigma_i$ sei def. als $\partial_d c := \sum a_i \partial_d \sigma_i$. Dann ist $\partial_d c$ eine $(d-1)$ -Kette, schreibe $\partial_d : C_d(K) \rightarrow C_{d-1}(K)$.

∂_d ist ein Homomorphismus und heißt *Randabbildung für Ketten*.

Die Sequenz $\dots \xrightarrow{\partial_{d+2}} C_{d+1}(K) \xrightarrow{\partial_{d+1}} C_d(K) \xrightarrow{\partial_d} C_{d-1}(K) \rightarrow \dots$

heißt *Kettenkomplex von K* .

• Ein d -Zykel ist eine d -Kette aus $\ker \partial_d =: Z_d = Z_d(K)$, ein d -Rand ist eine d -Kette aus $\text{im } \partial_{d+1} =: B_d = B_d(K)$.

Satz 3.2. *Es gilt $\partial_{d-1} \partial_d c = 0$ für alle d und jede d -Kette c .*

Beweis. Für einen d -Simplex $\sigma_i = \text{conv}(u_0, \dots, u_d)$ gilt:

$$\begin{aligned} \partial_{d-1} \partial_d \sigma_i &= \partial_{d-1} \left(\sum_{j=0}^d \text{conv}(u_0, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_d) \right) = \sum_{j=0}^d \partial_{d-1} (\text{conv}(u_0, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_d)) \\ &= \sum_{j=0}^d \sum_{i \neq j} \text{conv}(u_0, \dots, \hat{u}_i, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_d), \end{aligned}$$

dabei taucht jede der $(d-2)$ -dimensionalen Seiten $\text{conv}(u_0, \dots, \hat{u}_i, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_d)$ genau zweimal in der Summe auf. Für eine d -Kette $c = \sum a_i \sigma_i$ gilt also:

$$\begin{aligned}\partial_{d-1}\partial_d c &= \partial_{d-1}(\sum a_i \partial_d \sigma_i) = \sum a_i \partial_{d-1} \partial_d \sigma_i \\ &= \sum 2a_i \left(\sum_{j=0}^d \sum_{i < j} \text{conv}(u_0, \dots, \hat{u}_i, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_d) \right) = 0\end{aligned}$$

wegen $a_i \in \mathbb{F}_2$.

□

Bemerkung 3.3. Also gilt: $B_d \leq Z_d$ Untergruppe.

Es ist $C_d(K) \cong (\mathbb{F}_2)^{s_d}$ mit s_d Anzahl der d -Simplizes in K ,

$Z_d(K) \cong (\mathbb{F}_2)^{z_d}$ für ein $z_d \in \mathbb{N}$, $B_d(K) \cong (\mathbb{F}_2)^{b_d}$ für ein $b_d \in \mathbb{N}$.

Definition 3.4 (Simpliziale Homologie).

Die d -te Homologiegruppe von K ist $H_d(K) := Z_d/B_d \cong (\mathbb{F}_2)^{z_d}/(\mathbb{F}_2)^{b_d} \cong (\mathbb{F}_2)^{z_d-b_d}$.

Der Rang $\text{rg } H_d(K) =: \beta_d(K)$ heißt d -te Bettizahl von K , also $\beta_d(K) = z_d - b_d$.

Satz 3.5 (Euler-Poincaré-Formel).

$$\text{Es gilt: } \chi(K) = \sum_{d=0}^{\infty} (-1)^d \beta_d(K) \text{ für die Eulercharakteristik von } K.$$

Beweis. Da $\partial_d : C_d(K) \rightarrow C_{d-1}(K)$ Homomorphismus ist folgt:

$$\begin{aligned}C_d(K)/\ker \partial_d \cong \text{im } \partial_d &\Leftrightarrow C_d(K)/Z_d(K) \cong B_{d-1}(K) \Leftrightarrow (\mathbb{F}_2)^{s_d}/(\mathbb{F}_2)^{z_d} \cong (\mathbb{F}_2)^{b_{d-1}} \\ &\Leftrightarrow (\mathbb{F}_2)^{s_d-z_d} \cong (\mathbb{F}_2)^{b_{d-1}} \Leftrightarrow s_d - z_d = b_{d-1} \Leftrightarrow s_d = z_d + b_{d-1}\end{aligned}$$

$$\text{Also: } \chi(K) = \sum_{d=0}^{\infty} (-1)^d s_d = \sum_{d=0}^{\infty} (-1)^d (z_d + b_{d-1}) = \sum_{d=0}^{\infty} (-1)^d (z_d - b_d) = \sum_{d=0}^{\infty} (-1)^d \beta_d(K)$$

□

Definition 3.6. Sei $K_0 \subseteq K$ Unterkomplex. Betrachte den Kettenkomplex

$$\dots \xrightarrow{\partial_{d+2}} C_{d+1}(K)/C_{d+1}(K_0) \xrightarrow{\partial_{d+1}} C_d(K)/C_d(K_0) \xrightarrow{\partial_d} C_{d-1}(K)/C_{d-1}(K_0) \rightarrow \dots$$

wobei $\partial_d : C_d(K)/C_d(K_0) \rightarrow C_{d-1}(K)/C_{d-1}(K_0)$ von $\partial_d : C_d(K) \rightarrow C_{d-1}(K)$ induziert wird.

Definiere die *relative Homologie* des Paares (K, K_0) als $H_d(K, K_0) := \ker \partial_d / \text{im } \partial_{d+1}$.

Bemerkung 3.7. Ist $f : K \rightarrow L$ eine simpliziale Abbildung, dann induziert f eine \mathbb{F}_2 -lineare Abbildung $f_* : H_d(K) \rightarrow H_d(L)$ in Homologie:

f induziert zunächst eine \mathbb{F}_2 -lineare Abbildung auf den Kettengruppen:

$$f_{\#} : C_d(K) \rightarrow C_d(L), \sum a_i \sigma_i \mapsto \sum a_i \tau_i \text{ mit } \tau_i = \begin{cases} f(\sigma_i) & \dim f(\sigma_i) = d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Diagramm
$$\begin{array}{ccc} C_d(K) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_d(L) \\ \partial_K \downarrow & & \downarrow \partial_L \\ C_{d-1}(K) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_{d-1}(L) \end{array}$$
 kommutiert,

deshalb gilt $f_{\#}(Z_d(K)) \subseteq Z_d(L)$ und $f_{\#}(B_d(K)) \subseteq B_d(L)$, also induziert $f_{\#}$ eine wohldefinierte Abbildung f_* auf den Quotienten:

$$f_* : H_d(K) = Z_d(K)/B_d(K) \rightarrow Z_d(L)/B_d(L) = H_d(L), \quad z + B_d(K) \mapsto f_{\#}(z) + B_d(L)$$

Ist $f : (K, K_0) \rightarrow (L, L_0)$ eine simpliziale Abbildung von Paaren, d.h. $f : K \rightarrow L$ simpliziale Abbildung mit $f(K_0) \subseteq L_0$, dann induziert f ebenso eine \mathbb{F}_2 -lineare Abbildung $f_* : H_d(K, K_0) \rightarrow H_d(L, L_0)$ in relativer Homologie.

Wegen $f_{\#} \circ g_{\#} = (f \circ g)_{\#}$ und $id_{\#} = id_{C_d(K, K_0)}$ gilt auch $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ und $id_* = id_{H_d(K, K_0)}$.

Es lässt sich zeigen, dass dieses Konzept der induzierten Abbildung in Homologie auf stetige Abbildungen zwischen triangulierten topologischen Räumen verallgemeinert werden kann.

Also ist $(H_d)_{d \in \mathbb{Z}}$ eine Folge von Funktoren von der Kategorie der Paare von triangulierten topologischen Räumen in die Kategorie der \mathbb{F}_2 -Vektorräume. Desweiteren lässt sich eine „passende“ Folge von natürlichen Transformationen $\partial_d : H_d(X, A) \rightarrow H_{d-1}(A, \emptyset)$ definieren und man kann (teilweise mit einigem Aufwand) nachrechnen dass die Axiome einer Homologietheorie erfüllt sind.

Aufgabe 3.8. Man zeige, dass das Dimensionsaxiom im Falle der simplizialen Homologie erfüllt ist.

Aufgabe 3.9. Man berechne die Bettizahlen der d -dimensionalen Sphäre S^d .

Literatur

- [1] H. Edelsbrunner, J.L. Harer, *Computational Topology: An Introduction*, AMS, 2009.
- [2] J.R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, 1984.
- [3] W. Lück, *Algebraische Topologie*, Vieweg, 2005.