

# DELAUNAY- & ALPHA-KOMPLEXE

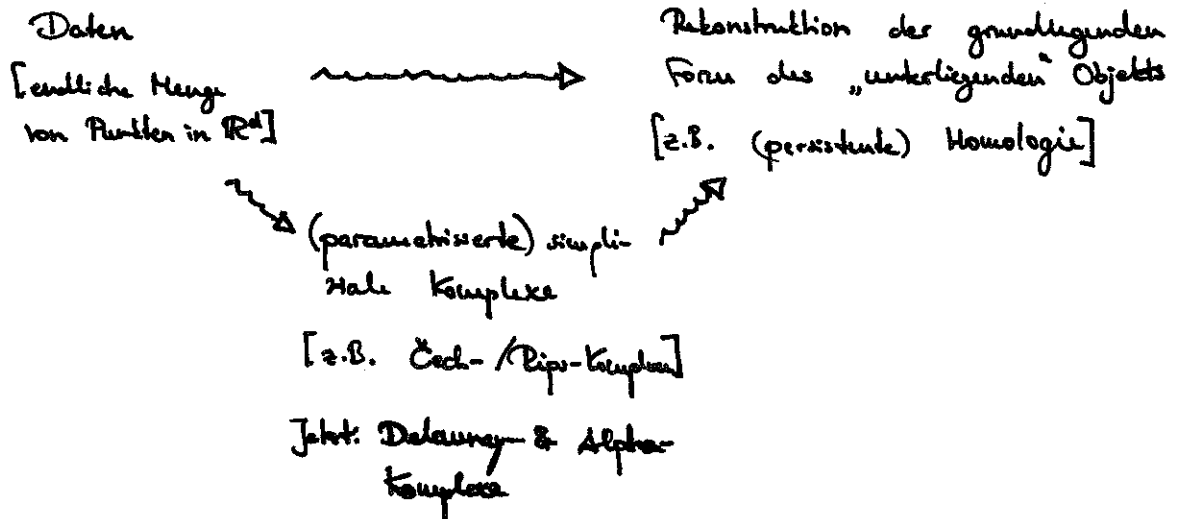
## EINFÜHRUNG

## ROAD TO PERSISTENT HOMOLOGY

### ÜBERSICHT:

- VORORDIAGRAMME
- DELAUNAYKOMPLEXE
- ALPHA-KOMPLEXE
- GESICHERTE VORORDIAGRAMME UND GEWICHTETE ALPHA-KOMPLEXE

... WAS IST ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE?



Idee. Bessere Anpassung der Komplexe an eine gegebene endliche Menge von Punkten in  $\mathbb{R}^d$  an die relative Position dieser Punkte

→ „Kleinere“ Komplexe als Čech- & Rips-Komplexe (d.h. geringere Dimension, besser Realisierungs- und Einbettungseigenschaften).

Hilfsmittel: (aus der algorithmischen Geometrie) Voronoi-Zellen & -diagramme und (aus der Topologie) Nerven von Überdeckungen.

## VORONOIDIAGRAMME

Was ist ein Voronoidiagramm?

endliche Menge von  
Punkten in  $\mathbb{R}^d$

$\leadsto$

Zerlegung von  $\mathbb{R}^d$  in  
konvexe Teilmengen so daß  
das folgende Problem gelöst wird:

Post office Problem: Gegeben die Position (endlich vieler) Postämter,  
wie kann man das Postamt bestimmen, das am nächsten  
zu einem gegebenen Haus liegt? Anders formuliert: Was  
sind die Einzugsbereiche der Postämter?

Definition. (Voronozelle, Voronoidiagramm). Sei  $d \in \mathbb{N}$  und sei  $S \subset \mathbb{R}^d$   
eine endliche Menge von Punkten.

- Ist  $s \in S$ , so ist

$$V(s) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x,s) = \min_{t \in S} d(x,t)\}$$

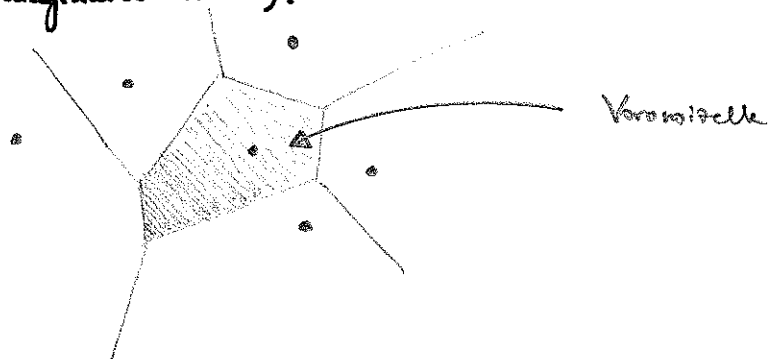
die Voronozelle von  $s$ .

- Die Menge  $\{V(s) \mid s \in S\}$  aller Voronozellen von  $S$   
wird als Voronoidiagramm von  $S$  bezeichnet.

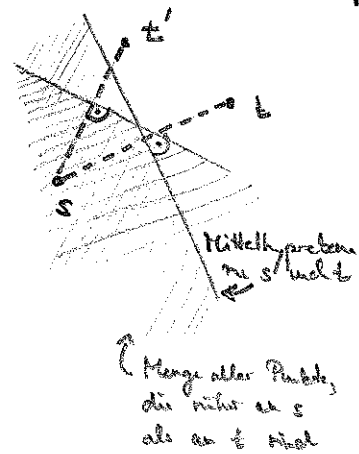
Wichtiges:

$$\bigcup_{s \in S} V(s) = \mathbb{R}^d$$

Beispiel. (Voronoidiagramm in  $\mathbb{R}^2$ ).



Proposition. (Eigenschaften von Voronoiellen und -diagrammen). Sei  $d \in \mathbb{N}$  und sei  $S \subset \mathbb{R}^d$  eine endliche Menge.



1) Ist  $s \in S$ , so ist die Voronoielle  $V(s)$  der Durchschnitt aller Halbräume von  $\mathbb{R}^d$ , die (für  $t \in S \setminus \{s\}$ ) durch die „Mittelparallele“ zwischen  $s$  und  $t$ , die  $s$  enthalten, gegeben sind.

2) Insbesondere sind alle ~~zwei~~ Voronoiellen konvex.  $\square$

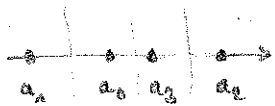
Bemerkung. (Algorithmische Berechnung von Voronoidiagrammen).

- Aus der obigen Proposition folgt: Das Voronoidiagramm zu  $n$  Punkten in  $\mathbb{R}^2$  kann in  $O(n^2 \cdot \log n)$  berechnet werden (der Schritt von  $n$  Halbebenen in  $\mathbb{R}^2$  kann in  $O(n \cdot \log n)$  berechnet werden (divide-and-conquer; der Schritt zweier konvexer Polygone in  $\mathbb{R}^2$  mit jeweils höchstens  $n$  Ecken kann in  $O(n)$  berechnet werden)).

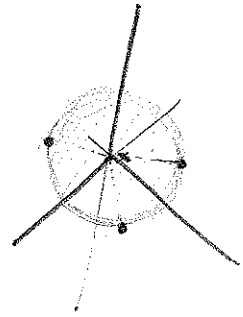
Tatsächlich kann das Voronoidiagramm von  $n$  Punkten in  $\mathbb{R}^2$  sogar in  $O(n \cdot \log n)$  berechnet werden (plane-sweep); dies ist optimal, da man mit Hilfe von Voronoidiagrammen in  $\mathbb{R}^2$  (bzw. sogar  $\mathbb{R}^1$ ) Folgen von Zahlen sortieren kann.

- Allgemein gilt: Die Komplexität von Voronoidiagrammen von  $n$  Punkten in  $\mathbb{R}^d$  ist  $\Theta(n^{d+1})$  und diese Voronoidiagramme können in  $O(n \cdot \log n + n^{d+1})$  berechnet werden.

[die Reg. no. kreuzt  
Anweisung ab ab]



Sachsaen:  $\Theta(n \cdot \log n)$



**Bemerkung.** (Durchschnitte von Voronoiellen). Sei  $d \in \mathbb{N}$ , sei  $S \subset \mathbb{R}^d$  endlich und sei  $S \subset T$ . Ein Punkt  $x \in \mathbb{R}^d$  liegt genau dann in  $\bigcap_{t \in T} V(t)$ , wenn es einen abgeschlossen  $d$ -Ball  $B \subset \mathbb{R}^d$  um  $x$  gibt mit  $T \subset \partial B$  und  $B \cap S = \emptyset$ .

[Dies zeigt insbesondere wie man mit Hilfe von Voronoidiagrammen das Toxic-Waste-Dump-Problem lösen kann...]

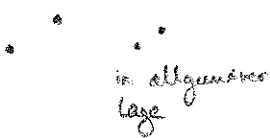
**Definition.** (Allgemeine Lage). Sei  $d \in \mathbb{N}$ . Eine endliche Teilmenge  $S \subset \mathbb{R}^d$  ist in allgemeiner Lage, falls folgendes gilt: Ist  $T \subset S$  affin abhängig, so gibt es keine  $(|T|-1)$ -Fläche in  $\mathbb{R}^d$ , die  $T$  enthält. (nur relevant für  $|T| \leq d+2$ )

→ Kontrolle über die Durchschnitte von Voronoiellen

**Beispiel.** (Allgemeine Lage in  $\mathbb{R}^2$ ). Vier Punkte in  $\mathbb{R}^2$  sind genau dann in allgemeiner Lage, wenn sie kein Schnittpunkt aufspannen. Ist  $S \subset \mathbb{R}^2$  in allgemeiner Lage, so gibt es nach obiger Bemerkung keinen Punkt in  $\mathbb{R}^2$ , der in mehr als drei Voronoiellen von  $S$  enthalten ist.



nicht in allgemeiner Lage



in allgemeiner Lage

**Bemerkung.** Modulo geeigneter kleiner lokaler Störungen kann man immer annehmen, daß endliche Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$  in allgemeiner Lage sind. [Edwards et al.?!]

DELAUNAY-KOMPLEXE

Aus jeder Überdeckung eines topologischen Raumes erhält man mithilfe des Nerns einen (abstrakten) simplizialen Komplex; auf diese Weise liefern Voronoidiagramme Delaunaykomplexe:

Delaunay = Делоне (auss. Mathematik)

(Vorstufe von Alpha-Komplex)

„aus Voronoi-Diagramm“

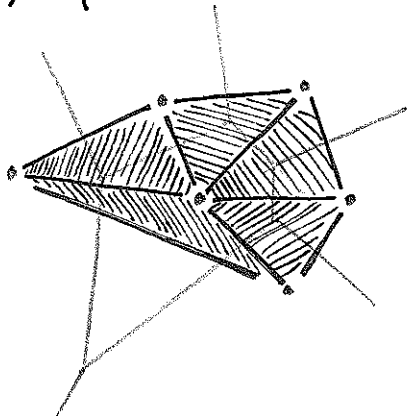
Definition. (Delaunaykomplex). Sei  $d \in \mathbb{N}$  und sei  $S \subset \mathbb{R}^d$  endlich.

Der Delaunaykomplex  $\mathcal{D}(S)$  ist der Nerv der Überdeckung  $(V(s))_{s \in S}$  von  $\mathbb{R}^d$  durch die Voronoiellen von  $S$ , d.h.  $\mathcal{D}(S)$  ist der durch

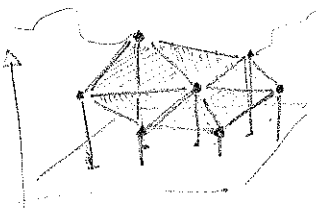
$$\mathcal{D}(S) := \left\{ T \mid T \subset S, \bigcap_{t \in T} V(t) \neq \emptyset \right\}$$

gegebene (abstrakte) simpliziale Komplex.

Beispiel. (Delaunaykomplex).



Bemerkung. (Delaunaytriangulierungen). Im zweidimensionalen Fall werden „Delaunaykomplexe“ <sup>(besser: Voronoi-Diagramm)</sup> (bzw. deren Vervollständigungen zu Triangulierungen) auch Delaunaytriangulierungen genannt.



[de Berg et al. Chapter 9]

Delaunaytriangulierungen werden z.B. verwendet, um aus diskreter Höhenprofilfunktion vernünftige simpliziale Höhenprofile zu berechnen; dabei spielt die Tatsache, daß Delaunaytriangulierungen Triangulierungen mit maximalem Minimalwinkel sind, eine wichtige Rolle.

Delaunaytriangulierungen können z.B. via Voronoidiagramm berechnet werden (Laufzeit  $O(|S| \cdot \log |S|)$ ), aber es gibt auch andere Verfahren.

Wie zu Beginn angedeutet, besitzen Delaunaykomplexe gute Realisierung- bzw. Einbettungseigenschaften:

Satz. (Geometrische Realisierung von Delaunaykomplexen). Sei  $d \in \mathbb{N}$  und sei  $S \subset \mathbb{R}^d$  in allgemeiner Lage. Dann ist

$$\{\text{conv}(T) \mid T \in \mathcal{D}(S)\}$$

eine geometrische Realisierung (in  $\mathbb{R}^d$ ) des Delaunaykomplexes  $\mathcal{D}(S)$  von  $S$ .

[Zur Erinnerung: Für  $\checkmark$ ch- bzw. Ripplekomplexe gibt es keinen guten Begriff von allgemeiner Lage, der ein solches Realisierungs- bzw. Einbettungsergebnis liefert!]

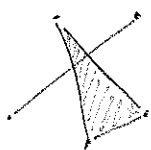
Beweis (skizze) des Satzes. Wir müssen folgendes zeigen:

① Ist  $T \in \mathcal{D}(S)$ , so ist  $\text{conv}(T)$  ein (nicht degeneriert) affines  $(|T|-1)$ -Simplex in  $\mathbb{R}^d$ .

② Sind  $T, T' \in \mathcal{D}(S)$ , so gilt

$$\text{conv}(T) \cap \text{conv}(T') = \text{conv}(T \cap T').$$

Zu ①: Dies folgt aus der Definition von „allgemeiner Lage“ und der obigen Beschreibung der Durchschnitte von Voronozellen.



kann also nicht auftreten!

Zu ②: Nach der obigen Charakterisierung von Durchschnitten von Voronoiellen genügt es, die folgende Aussage zu beweisen:

**Lemma.** Sei  $d \in \mathbb{N}$ , seien  $B, B' \subset \mathbb{R}^d$  zwei abgeschlossene Bälle und seien  $T \subset B, T' \subset B'$  endliche Mengen mit  $T \cap B' = \emptyset$  und  $T' \cap B = \emptyset$ .  
Dann gilt  
$$\text{conv}(T) \cap \text{conv}(T') = \text{conv}(T \cap T').$$

**Beweis.** (des Lemmas; durch vollständige Induktion über  $d$ )

**Induktionsanfang:** Für  $d \in \{0, 1\}$  sieht man leicht, daß die Behauptung gilt (denn dann gilt bereits  $\text{conv}(T) = B \dots$ ).

**Induktionsschritt:** Sei  $d \in \mathbb{N}_{>1}$  und die Behauptung sei für  $d-1$  bereits gezeigt. Ohne Einschränkung sei  $B \cap B' \neq \emptyset$ .

Sei  $h$  die Hyperebene durch  $\partial B \cap \partial B'$ , die normal zur Gerade durch die Mittelpunkte von  $B$  und  $B'$  ist. Seien  $H$  bzw.  $H'$  die durch  $h$  gegebenen Halbräume mit  $T \subset H, T' \subset H'$ .

Aufgrund von Konvexität erhalten wir

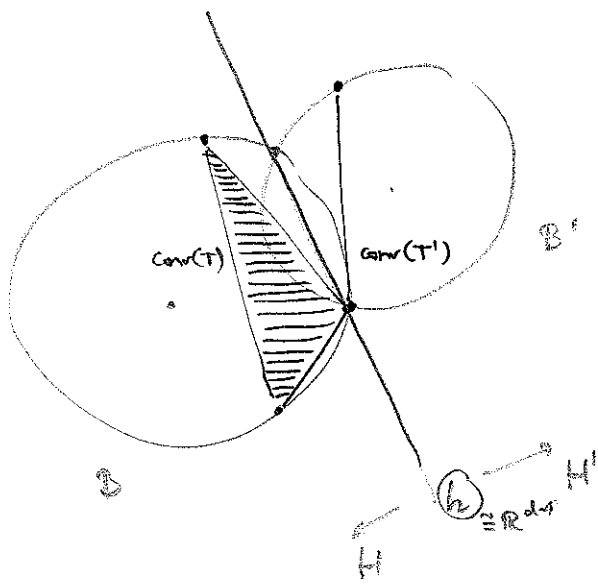
$$\text{conv}(T) \cap \text{conv}(T') \subset \text{conv}(T) \cap H \cap \text{conv}(T') \cap H'$$

$$\subset \underbrace{h \cap B \cap B'}_{\cong \mathbb{R}^{d-1}} \quad \text{Bälle in } h,$$

und damit aus der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} \text{conv}(T \cap T') &\stackrel{\text{i.V.}}{=} \text{conv}(T \cap h) \cap \text{conv}(T' \cap h) \\ &\stackrel{\text{Konvexität, } \text{conv}(T) \subset H, \text{conv}(T') \subset H', \dots}{=} \text{conv}(T) \cap \text{conv}(T') \cap h \\ &\stackrel{\text{(s.o.)}}{=} \text{conv}(T) \cap \text{conv}(T'). \end{aligned}$$

□  
6



## ALPHA-KOMPLEXE

Die Topologie von Delaunaykomplexen ist nicht besonders interessant; man kann nämlich zeigen, daß

$$\|D(S)\| \stackrel{\text{dies ist}}{=} \bigcup_{T \in DS} \text{conv}(T) = \text{conv}(S) \simeq *$$

für alle endlichen Teilmengen  $S \subset \mathbb{R}^d$  in allgemeiner Lage gilt.

Idee. „Mischung“ von Delaunay- und Čechkomplexen. Dies liefert eine parametrisierte Version von Delaunaykomplexen, die sogenannten Alpha-Komplexe.

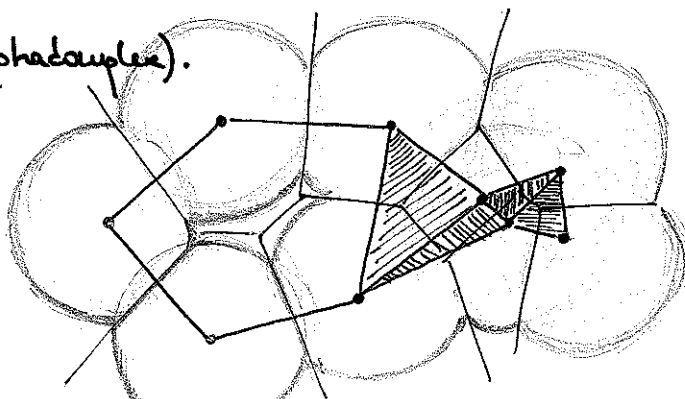
Definition. (Alpha-Komplex). Sei  $d \in \mathbb{N}$  und sei  $S \subset \mathbb{R}^d$  endlich, und sei  $r \in [0, \infty]$ . Der Alpha-Komplex von  $S$  zum Radius  $r$  ist der abstrakte simpliziale Komplex  $K_r(S)$ , der durch

$$K_r(S) := \text{Nerv} \left( (B_r(s) \cap V(S))_{s \in S} \right)$$

gegeben ist.

Beispiel.

(Alpha-Komplex).



Es gilt:  $K_\infty(S) = \text{Nerv} (V(s))_{s \in S} = D(S)$  und  
 $K_0(S) = S.$

Satz. (Eigenschaften von Alpha-Komplexen). Sei  $d \in \mathbb{N}$  und  $s: S \subset \mathbb{R}^d$  endlich

" $\circ$ " gilt i.a. nicht (ii)

1) für alle  $r \in [0, \infty]$  ist  
 $S \subset K_r(S) \subset DS \cap \check{Cech}_r(S)$ .

gilt nicht für  $\check{Cech}_r(S)$ !

2) Insbesondere folgt: Ist  $S \subset \mathbb{R}^d$  in allgemeiner Lage und ist  $r \in [0, \infty]$ , so ist

$$\{\text{conv}(T) \mid T \in K_r(S)\}$$

eine geometrische Realisierung von  $K_r(S)$  in  $\mathbb{R}^d$ .

3) Für alle  $r \in [0, \infty]$  ist  $\|K_r(S)\| \simeq \bigcup_{s \in S} B_r(s)$ .

4) Für alle  $r, r' \in [0, \infty]$  gilt:

$$r \leq r' \implies K_r(S) \subset K_{r'}(S).$$

$$\simeq \bigcup_{s \in S} B_r(s) \cap V(S)$$



mit perspektive Homotopie

Aber ist  $(K_r(S))_{r \in [0, \infty]}$  eine aufsteigende Folge von Unterkomplexen von  $DS$ , die die Čech-Familie „verfeinert“.

(Man beachte, daß  $DS$  nur endlich viele Unterkomplexe besitzt – also liefert  $(K_r(S))_{r \in [0, \infty]}$  eine endliche Filtrierung.)

Beweis.

1) folgt direkt aus der Definition.

2) folgt mit 1) aus dem entsprechenden Satz über Dehnungskomplexen.

3) ist eine Konsequenz des Nerve-Theorems.

4) folgt direkt aus der Definition.  $\square$

Bemerkung.

(Berechnung der Alpha-Komplexfiltrierung). Man berechnet zunächst das Voronoidiagramm und den Delaunaykomplex von  $S$ . In jedem Simplex im Delaunaykomplex berechnet man dann den Abstand der zugehörigen Punkte aus  $S$  zu der entsprechenden Seite im Voronoidiagramm. Dieser Abstand gibt an, ab welchem Radius dieser Simplex im Alpha-Komplex enthalten ist.

VARIANTE:  
GEWICHTETE  
ALPHA-KOMPLEXE

In vielen Anwendungen ist es sinnvoll, nicht alle Punkte der gegebenen Datenmenge gleich zu behandeln (z.B. mitte man verschiedene Typen von Atomen in molekularen Strukturen verschieden gewichten). Dann betrachten wir gewichtete Alpha-Komplexe (die auf gewichteten Voronoidiagrammen beruhen).

Definition. (Gewichtetes Voronoidiagramm). Sei  $d \in \mathbb{N}$ , sei  $S \subset \mathbb{R}^d$  endlich und seien Gewichte  $w := (w_s)_{s \in S} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  gegeben. Zu  $s \in S$  definieren wir

$$\pi_s : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \|x-s\|^2 - w_s. \quad (\text{modifizierter Abstand})$$

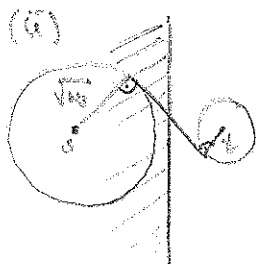
- Sei  $s \in S$ . Die gewichtete Voronoi-Zelle von  $s$  bzgl.  $w$  ist

$$V(s, w) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \pi_s(x) = \min_{t \in S} \pi_t(x)\}.$$

- Die Menge  $\{V(s, w) \mid s \in S\}$  wird als gewichtete Voronoidiagramm von  $S$  bzgl.  $w$  bezeichnet.

„s auch  $B_{\sqrt{w_s}}$ “

$V(s, w)$  ist konvex,  
kann aber leer sein!

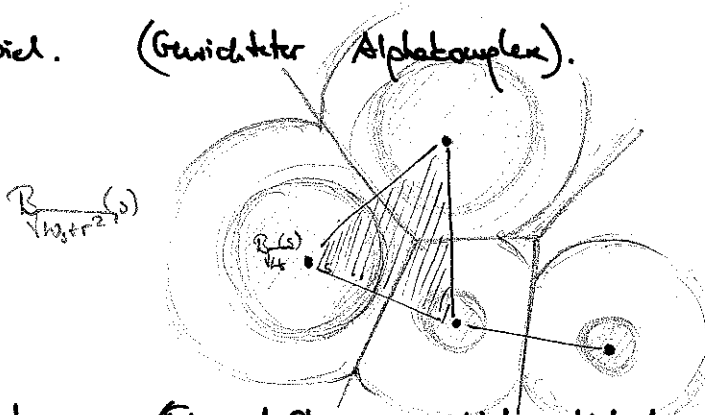


Definition. (Gewichteter Alpha-Komplex). Sei  $d \in \mathbb{N}$ , sei  $S \subset \mathbb{R}^d$  endlich, sei  $w := (w_s)_{s \in S} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  und sei  $r \in [0, \infty]$ . Der gewichtete Alpha-Komplex von  $S$  bzgl.  $w$  zum Radius  $r$  ist

$$K_r(S, w) := \text{Nerv} \left( \left( \frac{B_{\sqrt{w_s+r^2}}(s)}{\sqrt{w_s+r^2}} \right)_{s \in S} \right).$$

$\sqrt{w_s+r^2}$  stellt sicher,  
dass sich die Bälle gut  
mit den Bällen schneiden!

Beispiel. (Gewichteter Alpha-Komplex).



Bemerkungen. (Eigenschaften gewichteter Alpha-Komplexe). Ist  $r \leq r'$ , so gilt  $K_r(S, w) \subset K_{r'}(S, w)$ , d.h. wir erhalten wieder eine aufsteigende Familie von Komplexen (bestimmt durch den gewichteten De-launay-Komplex). Unter geeigneten „allgemeine Lage“-Bedingungen gelten analoge Realisierungssätze wie im ungewichteten Fall.