Diskrete Mathematik – Graphentheorie (Übersicht)

Dr. C. Löh 2. Februar 2010

0 Graphentheorie – Grundlagen

Definition (Graph, gerichteter Graph)**.**
- Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V eine Menge ist (die Menge der *Knoten*) und $E \subset \bigl\{\{u, v\} \bigm| u, v \in V,\ u \neq v\bigr\}$ eine Teilmenge ist (die Menge der *Kanten*).
- Ein *gerichteter Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V eine Menge ist und $E \subset V \times V$ eine Teilmenge ist.

Konvention. Wir werden im folgenden immer annehmen, dass [gerichtete] Graphen nur *endlich viele* Knoten bzw. Kanten haben.

Außerdem wurden die folgenden Begriffe/Beispiele behandelt:
- vollständige Graphen, vollständige bipartite Graphen
- Modellierung von Situationen/Problemen durch Graphen
- Isomorphismen von [gerichteten] Graphen
- adjazente/benachbarte Knoten
- Grad von Knoten in [gerichteten] Graphen, Ein-Grad und Aus-Grad in gerichteten Graphen
- Gradfolge
- Untergraphen und induzierte Untergraphen
- [gerichtete] Wege, [gerichtete] Kreise
- [stark] zusammenhängende [gerichtete] Graphen, [starke] Zusammenhangskomponenten
- Abstand von Knoten
- Adjazenzmatrizen, Adjazenzlisten

Satz (Summe der Grade in einem Graph)**.**
- *Sei $G = (V, E)$ ein [gerichteter] Graph. Dann ist*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot \#E.$$

- *Insbesondere ist in jedem [gerichteten] Graph die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.*

1 Bäume

Definition (Baum, Wald)**.**
- Ein Graph ist ein *Baum*, wenn er zusammenhängend ist und keine Kreise enthält.
- Ein Graph ist ein *Wald*, wenn alle Zusammenhangskomponenten Bäume sind.

Weitere Begriffe zu Bäumen:
- Blätter, innere Knoten
  (jeder Baum mit mindestens zwei Knoten besitzt ein Blatt)
- aufspannende Bäume
  (jeder zusammenhängende Graph besitzt einen aufspannenden Baum)

Satz (Charakterisierung von Bäumen)**.** *Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V \neq \emptyset$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
1. *Der Graph G ist ein Baum.*
2. *Je zwei Knoten von G sind durch genau einen Weg verbunden.*
3. *Der Graph G ist zusammenhängend und es gilt $\#E = \#V - 1$.*

Begriffe zu Wurzel- und Binärbäumen:
- Wurzelbäume
- Vorgänger/Nachfolger von Knoten in Wurzelbäumen
- Beispiele von Wurzelbäumen (Spielbäume, Parsebäume)
- Höhe von Wurzelbäumen und Induktion über Teilbäume
- Binärbäume

Satz (Höhe von Binärbäumen)**.** *Für alle Binärbäume $T = (V, E)$ gilt*

$$2^{\mathrm{ht}(T)+1} \geq \#V + 1.$$

Grundlegende Algorithmen zur Bestimmung von aufspannenden Bäumen sind Breitensuche (breadth first search) und Tiefensuche (depth first search), siehe Abbildung 1). Eigenschaften von Breitensuche/Tiefensuche:
- Die Algorithmen terminieren.
- Der ausgegebene Graph ist tatsächlich ein Baum, der alle Knoten aus der Zusammenhangskomponente des Startknotens enthält.
- Für Breitensuche gilt: Mit Hilfe der FIFO-Eigenschaft der Queue kann man induktiv beweisen, dass der ausgegebene Baum kürzeste Wege zwischen dem Startknoten und den anderen Knoten seiner Zusammenhangskomponente liefert.
- Tiefensuche hingegen berechnet im allgemeinen keine kürzesten Wege; dafür ist Tiefensuche „lokaler.“

Algorithmus (Breitensuche/Tiefensuche)**.**

Eingabe	Ein Graph G und ein Knoten r von G	
Ausgabe	Ein aufspannender Baum der Zusammenhangskomponente von r in G.	
Datenstrukturen	T	ein Graph [die Ausgabe]
	M	eine Menge von Knoten [bereits besichtigte Knoten]
	Q	Queue von Paaren von Knoten [welcher Knoten ist als nächstes zu bearbeiten?] für *Breitensuche*: FIFO-Queue für *Tiefensuche*: LIFO-Queue
Initialisierung	T	Baum/Graph, der nur den Knoten r enthält
	M	Die Menge $\{r\}$
	Q	Die FIFO-/LIFO-Queue aller Paare (v, r) enthält, wobei v ein Knoten in G ist, der zu r benachbart ist
Algorithmus	Solange Q nicht-leer ist:	

- entferne das erste Element (u, v) aus Q
- falls $u \notin M$ ist:
  - füge u und die Kante $\{u, v\}$ zu T hinzu
  - für alle Nachbarn w von u in G:
    - falls $w \notin M$ ist: füge (w, u) zu Q hinzu
  - füge u zu M hinzu

Gib T aus.

Abbildung 1: Breitensuche/Tiefensuche

Definition (Gewichteter Graph).

- Ein *gewichteter Graph* ist ein Graph $G = (V, E)$ zusammen mit einer Funktion $\delta \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, der *Gewichtsfunktion*.
- Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter Graph mit Gewichtsfunktion $\delta \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$. Die *Länge (bezüglich δ)* eines Weges $v_0 v_1 \dots v_n$ in G ist

$$\ell_\delta(v_0 v_1 \dots v_n) := \sum_{j=0}^{n-1} \delta\bigl(\{v_j, v_{j+1}\}\bigr).$$

Dijkstras Algorithmus (siehe Abbildung 2) zur Bestimmung kürzester Wege in gewichteten Graphen (mit nichtnegativer Gewichtsfunktion) ist eine Variante von Breitensuche. Eigenschaften von Dijkstras Algorithmus:

- Der Algorithmus terminiert.
- Der ausgegebene (gewichtete) Graph ist tatsächlich ein Baum, der alle Knoten aus der Zusammenhangskomponente des Startknotens enthält.
- Da die verwendete Queue Q eine Priority-Queue ist, kann man induktiv zeigen, dass die dritte Komponente der Elemente (u, v, d) von Q jeweils die Länge (bezüglich der Gewichtsfunktion) eines kürzesten *bisher bekannten* Weges in G von r nach u ist.
  Da die Gewichtsfunktion keine negativen Werte annimmt, kann man zeigen: Ist $((u, v), d)$ das vorderste Element von Q, so gibt es in G keinen Weg von r nach u, dessen Länge (bezüglich δ) kleiner als d ist.
  Also liefert der ausgegebene Baum kürzeste Wege von r in G.

Minimale aufspannende Bäume in zusammenhängenden Graphen können mit Hilfe von Kruskals Algorithmus bestimmt werden:

Algorithmus (Kruskals Algorithmus).

Eingabe	Ein zusammenhängender gewichteter Graph $G = (V, E)$ mit Gewichtsfunktion δ
Ausgabe	Ein minimaler aufspannender Baum von G
Datenstrukturen	T ein gewichteter Graph [die Ausgabe]
Initialisierung	T der gewichtete Graph, der alle Knoten aus G enthält aber keine Kanten
Algorithmus	Solange T kein aufspannender Baum von G ist: – finde eine Kante $e \in E$, die nicht in T liegt, minimalen Gewichts $\delta(e)$ mit folgender Eigenschaft: fügt man e zu T hinzu, so entsteht in T kein Kreis. – füge die Kante e mit Gewicht $\delta(e)$ zu T hinzu Gib T aus.

Algorithmus (Dijkstras Algorithmus)**.**

Eingabe	Ein gewichteter Graph G mit nichtnegativer(!) Gewichtsfunktion δ und ein Knoten r von G	
Ausgabe	Ein (gewichteter) aufspannender Baum der Zusammenhangskomponente von r in G, der (bezüglich δ) kürzeste Wege in G zwischen dem Startknoten und den anderen Knoten dieser Zusammenhangskomponente liefert.	
Datenstrukturen	T	ein gewichteter Graph [die Ausgabe]
	M	eine Menge von Knoten [bereits besichtigte Knoten]
	Q	Priority-Queue von Paaren $\big((u,v),d\big)$, wobei u und v Knoten von G sind und $d \in \mathbb{R}$ ist (je niedriger die dritte Komponente ist, desto eher wird das Element wieder aus Q entfernt) [welcher Knoten ist als nächstes zu bearbeiten?]
Initialisierung	T	gewichteter Graph, der nur den Knoten r enthält
	M	Die Menge $\{r\}$
	Q	Priority-Queue aller Paare $\big((v,r),\delta(\{r,v\})\big)$, wobei v ein Knoten in G ist, der zu r benachbart ist

Algorithmus

Solange Q nicht-leer ist:

- entferne das erste Element $\big((u,v),d\big)$ aus Q
- falls $u \notin M$ ist:
    - füge u und die Kante $\{u,v\}$ (mit dem Gewicht $\delta(\{u,v\})$) zu T hinzu
    - für alle Nachbarn w von u in G:
        - falls $w \notin M$ ist: füge $\big((w,u),d+\delta(\{u,w\})\big)$ zu Q hinzu
    - füge u zu M hinzu

Gib T aus.

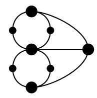
Abbildung 2: Dijkstras Algorithmus

2 Eulersche Graphen

Definition (Euler-Tour, Euler-Rundtour, Eulerscher Graph)**.**

- Eine *Euler-Tour* in einem Graph $G = (V, E)$ ist eine Folge $v_0, \dots, v_n$ von Knoten von G mit
  - für alle $j \in \{0, \dots, n-1\}$ ist $\{v_j, v_{j+1}\} \in E$,
  - die Kanten $\{v_0, v_1\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}$ sind verschieden, und
  - es ist $\big\{\{v_j, v_{j+1}\} \bigm| j \in \{0, \dots, n-1\}\big\} = E$.
- Eine *Euler-Rundtour* in einem Graph $G = (V, E)$ ist eine Folge $v_0, \dots, v_n$ von Knoten von G mit
  - für alle $j \in \{0, \dots, n-1\}$ ist $\{v_j, v_{j+1}\} \in E$ und $\{v_n, v_0\} \in E$,
  - die Kanten $\{v_0, v_1\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_0\}$ sind verschieden, und
  - es ist $\big\{\{v_0, v_1\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_0\}\big\} = E$.

  (Sind nur die ersten beiden Bedingungen erfüllt, so handelt es sich um eine *Rundtour*.)
- Ein Graph heißt *Eulersch*, wenn er eine Euler-Rundtour besitzt.



Königsberger Brückenproblem. Ist der Graph im Bild rechts Eulersch?

Satz (Charakterisierung Eulerscher Graphen)**.** *Sei G ein zusammenhängender Graph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Der Graph G ist Eulersch.*
2. *Alle Knoten von G haben geraden Grad.*
3. *Die Menge der Kanten von G kann in (kanten)disjunkte Kreise in G zerlegt werden.*

Algorithmus (Hierholzers Algorithmus)**.**

Eingabe — Ein (nicht-leerer) Eulerscher Graph G

Ausgabe — Eine Euler-Rundtour in G

Datenstrukturen — c eine Folge von Knoten von G

Initialisierung — c Folge, die aus einem einzelnen Knoten von G besteht

Algorithmus — Solange c keine Euler-Rundtour von G ist:
  - finde eine Kante $e \in E$, die nicht in c liegt aber einen Knoten mit c gemeinsam hat
  - finde eine Rundtour c', die e aber keine Kante von c enthält
  - füge c' so in c ein, dass eine Rundtour entsteht

  Gib c aus.

Definition (Hamiltonscher Graph)**.** Ein Graph heißt *Hamiltonsch*, wenn er einen Kreis besitzt, der jeden Knoten (genau) einmal durchläuft.

Warnung. Das Problem zu entscheiden, ob ein gegebener Graph Hamiltonsch ist, ist ein sogenanntes NP-vollständiges Problem.

3 Planarität

Definition (Planare Einbettung, planarer Graph)**.**

- Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Eine *planare Einbettung* von G besteht aus
  - einer Abbildung $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^2$, und
  - einer Menge $\{f_e\colon [0,1] \longrightarrow E \mid e \in E\}$ von stetigen Abbildungen

  mit folgenden Eigenschaften:
  - Für alle $e = (u, v) \in E$ ist $f_e(0) = f(u)$ und $f_e(1) = f(v)$.
  - Die Abbildung f ist injektiv.
  - Die zusammengesetzte Abbildung $\coprod_{e\in E} f_e|_{(0,1)}\colon \coprod_{e\in E}(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist injektiv.
- Sei $G = (V, E)$ ein (ungerichteter) Graph. Eine *planare Einbettung* von G besteht aus der Wahl einer Orientierung auf E zusammen mit einer planaren Einbettung des zugehörigen gerichteten Graphen.
- Ein Graph heißt *planar*, wenn er eine planare Einbettung besitzt.

Definition (Facetten einer planaren Einbettung)**.** Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $(f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^2, \{f_e\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid e \in E\})$ eine planare Einbettung (einer orientierten Version) von G. Die *Facetten* dieser planaren Einbettung sind die Wegzusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{e\in E} f_e([0,1])$.

Satz (Eulersche Polyederformel)**.** *Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit $V \neq \emptyset$ und sei F die Menge der Facetten einer planaren Einbettung von G. Dann gilt*

$$\#V - \#E + \#F = 2.$$

[Der (induktive) Beweis dieses Satzes beruht auf dem *Jordanschen Kurvensatz*.]

Korollar. *Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit $V \neq \emptyset$.*

1. *Ist $\#V \geq 3$, so ist $\#E \leq 3 \cdot \#V - 6$.*
2. *Der Graph G besitzt einen Knoten $v \in V$ mit $\deg v \leq 5$.*
3. *Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.*

Satz (Kuratowskis Charakterisierung planarer Graphen)**.** *Ein zusammenhängender nicht-leerer Graph ist genau dann planar, wenn er keine Verfeinerung von K_5 oder $K_{3,3}$ als Untergraph enthält. [ohne Beweis]*

Definition (Verfeinerung)**.** Sei G ein Graph. Eine *Verfeinerung* von G ist ein Graph, in dem die Kanten von G durch unabhängige Wege zwischen ihren Endpunkten ersetzt werden.

Satz (Klassifikation der regulären Polyeder)**.** *Es gibt genau fünf reguläre (dreidimensionale beschränkte) Polyeder: den Tetraeder, den Würfel, den Oktaeder, den Dodekaeder und den Ikosaeder.*

4 Färbungen

Definition (Färbung, chromatische Zahl)**.** Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
- Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine *k-Färbung* ist eine Abbildung $c\colon V \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ mit

$$\forall_{\{u,v\} \in E} \quad c(u) \neq c(v).$$

- Die *chromatische Zahl* von G ist definiert als

$$\chi(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ besitzt eine } k\text{-Färbung}\}.$$

- Der Graph G heißt *bipartit*, falls $\chi(G) \leq 2$.

Probleme, die als Färbungsprobleme formuliert werden können:
- Das Färben von Landkarten
- Wieviele Register werden zur Ausführung eines Programms benötigt?

Warnung. Das Problem, zu einem gegebenen Graph die chromatische Zahl zu bestimmen, ist ein sogenanntes NP-vollständiges Problem.

Satz (Elementare Abschätzungen der chromatischen Zahl)**.**
1. *Für alle Graphen G ist $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, wobei $\Delta(G)$ der maximale Knotengrad von G ist.*
2. *Bäume sind bipartit.*
3. *Für alle Graphen G ist $\chi(G) \geq \omega(G)$, wobei $\omega(G)$ die Cliquenzahl von G ist.*

Satz (Vier- bzw. Fünffarbensatz)**.**
1. *Jeder planare Graph ist 4-färbbar; insbesondere sind alle ebenen Landkarten von zusammenhängenden Ländern 4-färbbar. [ohne Beweis]*
2. *Jeder planare Graph ist 5-färbbar. [mit Beweis]*

Satz (Graphen mit großer chromatischer Zahl und großem Umfang)**.**
1. *Für alle $g \in \mathbb{N}$ und alle $\chi \in \mathbb{N}$ gibt es einen Graph mit Umfang g und chromatischer Zahl χ. [ohne Beweis]*
2. *Für alle $\chi \in \mathbb{N}$ gibt es einen Graph mit Umfang mindestens 4 und chromatischer Zahl χ (Konstruktion von Mycielski).*

5 Matchings

Definition (Matching)**.** Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine Menge $M \subset E$ von Kanten von G heißt *unabhängig*, falls
$$\forall_{e,f \in M} \quad e \cap f = \emptyset.$$
- Ein *Matching für* $H \subset V$ in G ist eine Menge $M \subset E$ unabhängiger Kanten von G mit
$$H \subset \bigcup M.$$
- Ein *perfektes Matching* von G ist ein Matching für V.

Satz (Heiratssatz von Hall)**.** *Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Bipartition $V = H \sqcup D$. Dann gibt es in G genau dann ein Matching für H, wenn (sogenannte* Heiratsbedingung*)*
$$\forall_{S \subset H} \quad \#N(S) \geq \#S.$$

Definition (Überdeckung)**.** Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine *Überdeckung* von G ist eine Menge $U \subset V$ von Knoten, so dass jede Kante von G mindestens einen Knoten aus U enthält.

Satz (Satz von König)**.** *Sei G ein bipartiter Graph. Die maximale Größe eines Matchings in G stimmt mit der minimalen Größe einer Überdeckung von G überein.*

Der Satz von König ist eines von vielen Beispielen von Sätzen in der Graphentheorie, die ein gewisses Maximum als ein Minimum von etwas anderem erkennen. Ein weiteres prominentes Beispiel ist:

Satz (MaxFlow-MinCut-Theorem)**.** *Der maximale Gesamtfluss in einem Netzwerk ist gleich der minimalen Kapazität eines Schnittes in diesem Netzwerk. [ohne Beweis]*