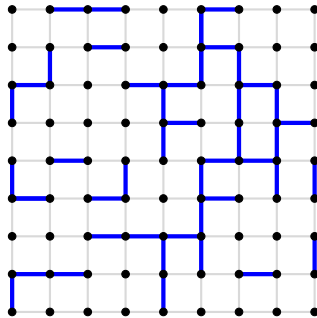


Seminar Zufallsgraphen

C. Löh (clara.loeh@uni-muenster.de)

Juli 2010

Graphen sind elementare mathematische Strukturen, die vielfach in Erscheinung treten – sowohl in der Modellierung (z.B. Netzwerke aller Art) als auch in der theoretischen Mathematik (z.B. Cayleygraphen).



In diesem Seminar werden wir uns mit Eigenschaften zufälliger Graphen beschäftigen. Einerseits treten solche Graphen natürlich in der Praxis (z.B. Perkolations in Netzwerken) auf; andererseits läßt sich mit probabilistischen Methoden auch auf elegante Weise zeigen, daß Graphen mit zunächst widersprüchlich erscheinenden lokalen und globalen Eigenschaften (z.B. sehr „dünn“ Graphen, die sich aber nicht mit wenigen Farben färben lassen) existieren.

Themen

Im wesentlichen werden wir die Standardwerke *Graph Theory* [4] von R. Diestel, *Random Graphs* [3] von B. Bollobás und *Percolation* [5] von G. Grimmett als Grundlage für dieses Seminar verwenden.

Caveat. In der Graphentheorie gibt es viele im Detail verschiedene Konventionen und Notationen; Sie sollten also in allen Quellen genau nachlesen, welche Konventionen verwendet werden, und versuchen, die Konventionen im Seminar konsistent zu halten.

Vorträge, die mit einem Stern gekennzeichnet sind, eignen sich gut als Grundlage für eine Bachelorarbeit. Nach Rücksprache können auch Bachelorarbeitsthemen zu anderen Vorträgen vergeben werden. Bitte teilen Sie mir möglichst bald (spätestens bis Ende Januar 2010) mit, falls Sie daran interessiert sind, Ihre Bachelor-Arbeit über dieses Seminar zu schreiben.

Grundlagen

Vortrag 1 (Grundlagen der Graphentheorie). Grundbegriffe der Graphentheorie (Graphen, Knoten, Kanten, Isomorphie von Graphen, (induzierte) Untergraphen, Wege/Kreise, Zusammenhang(skomponenten), Bäume); Beispielgraphen (K_n , $K_{m,n}$); Situationen, die mit Hilfe der Graphentheorie modelliert werden können (z.B. Färbungsprobleme, Netzwerke, ...).

Literatur: Alle Bücher über Graphentheorie, z.B. [6], [4]

Vortrag 2 (Grundlagen der Stochastik). Grundbegriffe der Stochastik (Wahrscheinlichkeitsräume, Wahrscheinlichkeitsmaße, Zufallsvariablen, Erwartungswert, Verteilungen, Unabhängigkeit, Produktmaße (auch unendliche Produkte)); Beispiele dazu.

Literatur: Alle Bücher über Stochastik/Wahrscheinlichkeitstheorie, z.B. [1, Kapitel I und II], [3, Kapitel 1]

Zufallsgraphen

Vortrag 3 (Standardmodelle für Zufallsgraphen). Die Klassen $G(n, M)$ und $G(n, p)$; Zusammenhang zwischen diesen Klassen; Eigenschaften von „fast allen“ Graphen.

Literatur: [3, Kapitel II]

Vortrag 4 (Der Rado-Graph). Definition des Rado-Graphs, Universalität und Eindeutigkeit des Rado-Graphs (mit Beweis); Zusammenhang zwischen Zufallsgraphen und dem Rado-Graph (mit Beweis).

Literatur: [4, Kapitel 8.3 und Kapitel 11.3]

Vortrag 5 (Expander*). Bipartite Graphen; der Heiratssatz von Hall (mit (induktivem) Beweis); Expander; Existenz von Expandern (Skizze des probabilistischen Beweises); explizite Expander (ohne Beweis).

Literatur: [4, Kapitel 2.1], [3, Kapitel XIII.4]

Färbungsprobleme

Vortrag 6 (Ramsey-Zahlen). Ramsey-Zahlen; Abschätzung von oben (klassischer Beweis); Abschätzung von unten (Beweis mit probabilistischen Methoden).

Literatur: [4, Kapitel 11.1], [3, Kapitel XI.1 und X.II], [6, Kapitel 1.8 und 2.10.2]

Vortrag 7 (Planare Graphen und die Eulersche Polyederformel*). Planare Einbettungen; planare Graphen; der Jordansche Kurvensatz (ohne Beweis); die Eulersche Formel für planare Graphen (inklusive Beweis); Folgerung: die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.

Literatur: [6, Kapitel 1.5.1, 1.5.2 (Theorem 1.35)], [4, Kapitel 4.1, 4.2]

Vortrag 8 (Chromatische Zahl und Fünffarbensatz*). Färbungen von Landkarten; der Vierfarbensatz (ohne Beweis); chromatische Zahl von Graphen; Graphen aus Landkarten; der Fünffarbensatz (mit Beweis).

Literatur: [6, Kapitel 1.6.1, (1.6.2), 1.6.3, (1.6.4)], [4, Kapitel 5.1]

Vortrag 9 („Dünne“ Graphen mit hoher chromatischer Zahl). Umfang von Graphen (girth); Existenz von Graphen mit großem Umfang und großer chromatischer Zahl (Beweis mit probabilistischen Methoden).

Literatur: [4, Kapitel 11.1 und 11.2]

Perkolation

Vortrag 10 (Perkolation und kritische Wahrscheinlichkeit*). Was ist Perkolation? Abstrakte Formulierung (bond percolation) und Beispiele aus der Physik; kritische Wahrscheinlichkeit; ab Dimension 2 liegt die kritische Wahrscheinlichkeit echt zwischen 0 und 1 (mit Beweis).

Literatur: [5, Kapitel 1.1–1.4]

Vortrag 11 (Aufsteigende Ereignisse und Standardabschätzungen). Aufsteigende Ereignisse; FKG-Ungleichung, BK-Ungleichung, Russos Formel (jeweils mit Beweisskizze).

Literatur: [5, Kapitel 2.1–2.4]

Vortrag 12 (Superkritischer Bereich: Eindeutigkeit des unendlichen Clusters*). Eindeutigkeit des unendlichen Clusters (mit Beweis); evtl. Stetigkeit der Perkulationswahrscheinlichkeit.

Literatur: [5, Kapitel 8.1–8.3]

Vortrag 13 (Subkritischer Bereich: Erwartete Clustergrößen). Die mittlere Clustergröße im subkritischen Bereich ist endlich und exponentieller Abfall der Größe endlicher Cluster (jeweils mit Beweis(skizze)).

Literatur: [5, Kapitel 5.1 und 5.2]

Vortrag 14 (Die kritische Wahrscheinlichkeit in Dimension 2*). Die kritische Wahrscheinlichkeit in Dimension 2 ist $1/2$ (mit Beweis(skizze) über Dualitätsargumente).

Literatur: [5, Kapitel 11.1–11.3]

Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnahme im Seminar (stellen Sie Fragen während der Vorträge, wenn Sie etwas nicht verstehen!).
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muß bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag abgegeben werden.
- Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen.
- Die Seminarleistungen werden wie in den entsprechenden Prüfungsordnungen benotet und angerechnet.

Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung (am besten vor Beginn des Semesters) und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Grundvoraussetzung für einen Seminarvortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.
- Geben Sie zu Beginn einen kurzen Überblick über Ihren Vortrag. Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.
- Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie die Zuhörer nicht durch zuviele technische Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.
- Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.
- Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.

- Seien Sie der Literatur gegenüber kritisch. Sie sollten auch versuchen, selbst geeignete ergänzende Literatur zu finden. Geeignete Ausgangspunkte sind zum Beispiel:

<http://books.google.com>
<http://www.ams.org/mathscinet>
<http://www.springerlink.com>

- Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probevortrag kann helfen den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.
- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Vortragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt. Überlegen Sie, welche Begriffe/Aussagen aus den vorherigen Vorträgen Sie nochmal kurz wiederholen sollten.
- Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem \LaTeX besser kennenzulernen [7]; dafür werden auch \LaTeX -Vorlagen zur Verfügung gestellt:
http://wwwmath.uni-muenster.de/u/clara.loeh/graphs_ws1011/
- Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

Hinweise zum Halten des Vortrags

- Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.
- Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind.
- Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.
- Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.
- Sprechen Sie laut und deutlich.
- Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.

- Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?
- Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

Literatur

- [1] H. Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*, fünfte Auflage, de Gruyter, 2001.
- [2] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.
Ein nettes Büchlein, das dabei hilft, mathematisch sauber und verständlich zu formulieren.
- [3] B. Bollobás. *Random Graphs*, Academic Press, 1985.
Standardwerk zu Zufallsgraphen
- [4] R. Diestel. *Graph theory*, dritte Auflage, Graduate Texts in Mathematics, Band 173, Springer, 2005.
Das Standardwerk der Graphentheorie; enthält leider nicht so viele Anwendungsbeispiele.
- [5] G. Grimmett. *Percolation*, zweite Auflage, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 321, Springer, 1999.
- [6] J.M. Harris, J.L. Hirst, M.J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory*, zweite Auflage, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.
Der graphentheoretische Teil dieses Buches bietet eine ausgewogene Mischung aus Theorie und Beispielen; das Buch ist sehr unterhaltsam geschrieben.
- [7] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The L^AT_EX Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.
Eines der Standardwerke zur Benutzung von L^AT_EX; weitere Unterstützung finden Sie unter <http://www.ctan.org/starter.html>
- [8] T. Tantau. *The TikZ and PGF Packages*, <http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf>
Dokumentation des TikZ-Pakets für L^AT_EX, das es erlaubt, auf einfache Weise Graphiken in L^AT_EX zu erstellen.