Klausur zur Vorlesung Analysis III, WS2009/10, Mittwoch, 10.2.2010 (Version H)

Willkommen zur Klausur! Bitte füllen Sie die folgenden Angaben auf diesem und auf dem 2. Deckblatt in **sehr leserlicher** Schrift aus!

Name: **Matrikelnr.:**

Studienfach: **Studiengang:** **Semesterzahl:**

Die Klausur besteht aus 3 Teilen (Vokabelbuch, Rechnen, Beweisen). In der ersten beiden Teilen können Sie maximal je 10 Punkte und im dritten Teil können Sie maximal 15 Punkte erzielen. Insgesamt können Sie damit 35 Punkte erzielen.
Zum Bestehen benötigen Sie 14 Punkte, wobei Sie mindestens 5 Punkte im Beweisteil erzielt haben müssen—allerdings kann jeder fehlende Punkt im Beweisteil durch zwei Punkte aus den ersten beiden Teilen ausgeglichen werden. Diese zählen dann aber nur zur Hälfte bei der Ermittlung der Note.
Beispiel: Wenn Sie im Beweisteil nur 3 Punkte erzielt haben, in den ersten beiden Teilen aber 14 Punkte, so erhalten Sie insgesamt 15 Punkte für die Notenbewertung (und Sie haben damit auch bestanden).

Die Klausur dauert 180 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

VIEL ERFOLG!

Ergebnisliste

Vokabelbuch:

1(1)	**1**(2)	**1** (3)	**1**(4)	**1**(5)	**2**(1)	**2**(2)	**2**(3)	**2**(4)	**2**(5)	$\sum$

Rechnen:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$

Beweisen:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$

Gesamt	**Note**

Notenspiegel

Punktzahl	0–7	7–13	14–15	16–17	18–19	20–21	22–23	24–25	26–27	28– 29	30–31	32–35
Note	6,0	5,0	4,0	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,7	1,3	1,0

Klausur zur Vorlesung Analysis III, WS2009/10, Donnerstag, 10.2.2010 (2. Deckblatt)

Name: **Matrikelnr.:**

Studienfach: **Studiengang:** **Semesterzahl:**

Ergebnisliste

Vokabelbuch:

1(1)	**1**(2)	**1** (3)	**1**(4)	**1**(5)	**2**(1)	**2**(2)	**2**(3)	**2**(4)	**2**(5)	$\sum$

Rechnen:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$

Beweisen:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum$

Gesamt	**Note**

Notenspiegel

Punktzahl	0–7	7–13	14–15	16–17	18–19	20–21	22–23	24–25	26–27	28– 29	30–31	32–35
Note	6,0	5,0	4,0	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,7	1,3	1,0

Vokabelbuch

In diesem Teil soll getestet werden, inwieweit Sie in der Lage sind, wichtige Definitionen aus der Vorlesung korrekt zu formulieren. Für jede richtig gelöste Teilaufgabe bekommen Sie einen Punkt. Sie können also in diesem Teil insgesamt 10 Punkte erwerben.

Aufgabe 1. Im folgenden sei (X, τ) ein topologischer Raum.

(1) Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Wann heißt eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \tau$ eine *Basis* von τ?

(2) Wann erfüllt (X, τ) das zweite Abzählbarkeits-Axiom?

(3) Wann heißt (X, τ) lokalkompakt?

(4) Sei "$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf X mit Quotientenabbildung $q : X \to X/\!\sim$. Wie ist die Quotiententopologie auf $X/\!\sim$ definiert?

(5) Sei X lokalkompakt. Wie lautet der Satz von Urysohn?

Aufgabe 2. Zur Integrationstheorie:

(1) Sei X ein lokalkompakter Raum. Was ist ein Radon-Integral I auf X?

(2) Sei I Radon-Integral auf X und sei $f : X \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion. Wie ist die L^1-Halbnorm $\|f\|_1$ definiert?

(3) Sei I Radon-Integral auf X und sei $f : X \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion. Wann heißt f I-integrierbar und wie ist dann das Integral $\int_X f(x)\, d_I x$ definiert?

(4) Formulieren Sie die Transformationsformel für das Lebesgue-Integral auf $\mathbb{R}^n$.

(5) Sei $F \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $k \leq n$. Wann heißt F *reguläres k-dimensionales C^1-Flächenstück* im $\mathbb{R}^n$? Was ist eine Karte für F?

Rechnen

In den folgenden Aufgaben soll getestet werden, inwieweit Sie die in der Vorlesung besprochenen Rechenverfahren beherrschen. Für jede richtig gelöste Aufgabe erhalten Sie zwei Punkte. Sie können in diesem Teil also insgesamt 10 Punkte erwerben. Maßgeblich für die Bewertung ist das Endergebnis, aber Sie sollten auch die wichtigsten Zwischenschritte angeben (welche bei fehlerhaftem Endergebnis berücksichtigt werden).

Aufgabe 1. Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks

$$\Delta := \{(x, y) : x, y \in [0, 1] \text{ und } 0 \leq x + y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Erinnerung: Der Schwerpunkt $s = (s_1, s_2)$ einer kompakten Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ist definiert durch

$$s_i = \frac{1}{\lambda_2(K)} \int_K x_i \, d_{\lambda_2}(x_1, x_2), \quad i = 1, 2.$$

Aufgabe 2. Sei $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf ihre Existenz und berechnen Sie diese im Fall der Existenz

$$\int_B \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \, d_{\lambda_2}(x, y) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \, d_{\lambda_2}(x, y).$$

Aufgabe 3. Sei $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ und } x^2 + y^2 \leq \cos^2(z)\}$. Berechnen Sie das dreidimensionale Volumen von K.

Aufgabe 4. Seien $v_1 = (1, 0, 1, 0)^t, v_2 = (0, 1, 2, 3)^t, v_3 = (0, 0, -1, 1)^t \in \mathbb{R}^4$. Berechnen Sie das 3-dimensionale Volumen des von v_1, v_2, v_3 aufgespannten Spats $S(v_1, v_2, v_3) \subseteq \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 5. Sei $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{S^2} (x^2 + y^2 - z^2)\, d_\gamma.$$

Beweisen

In diesem Abschnitt sollen Sie einige Aussagen beweisen. Sie dürfen dazu alle Resultate der Vorlesung benutzen. Für jede richtig gelöste Aufgabe erhalten Sie 3 Punkte. Sie können also in diesem Bereich insgesamt 15 Punkte erreichen.

Aufgabe 1. Sei (X, τ) ein topologischer Hausdorff-Raum und sei $K \subseteq X$ kompakt. Zeigen Sie: Zu jedem $y \in X \setminus K$ existieren offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $K \subseteq U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Beweis:

Aufgabe 2. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt und sei $\mathcal{P}$ die Menge aller reellen Polynome auf K, d.h. $f \in \mathcal{P}$ wenn ein $N \in \mathbb{N}$ und Koeffizienten $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$f(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N} a_{i,j} x^i y^j$$

für alle $(x,y) \in K$. Beweisen Sie, dass $\mathcal{P}$ bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_K$ dicht liegt in $C^{\mathbb{R}}(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$.

Beweis:

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und für $z, w \in \mathbb{T}$ setzen wir

$$z \sim w \Leftrightarrow z = w \ \vee \ z = \bar{w}.$$

Sei $\mathbb{T}/\sim$ der Quotientenraum versehen mit der Quotiententopologie. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{T}/\sim \longrightarrow [-1, 1]$; $f([z]) = \operatorname{Re} z$ ein Homöomorphismus ist (hierbei bezeichnet $[z]$ die Äquivalenzklasse von $z \in \mathbb{T}$).

Beweis:

Aufgabe 4. Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to (0, \infty)$ stetig. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(y)}\,dy\right) \geq (b-a)^2.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt: $\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \geq 2$.

Beweis:

Aufgabe 5. Sei $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und sei $N : S^1 = \partial K \to \mathbb{R}^2$ die äußere Normale an K, d.h. in diesem Fall, dass $N(x,y) = (x,y)$ für alle $(x,y) \in S^1$. Beweisen Sie: Ist $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_K \big(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\big)(x,y)\, d_{\lambda_2}(x,y) = \int_{S^1} \langle f, N\rangle\, d_\gamma.$$

Hinweis: Die rechte Seite der Formel ist das Integral der Funktion $(x,y) \mapsto \langle f(x,y), N(x,y)\rangle = f_1(x,y)x + f_2(x,y)y$ über der eindimensionalen C^1-Untermannigfaltigkeit $S^1 = \partial K$ von $\mathbb{R}^2$.