Misterlösung zur Klausur zur Vorlesung Analysis I, WS08/09, Samstag, 14.2.2009 (Version C)

Vokabelbuch

In diesem Teil soll getestet werden, inwieweit Sie in der Lage sind, wichtige Definitionen aus der Vorlesung korrekt zu formulieren. Für jede richtig gelöste Teilaufgabe bekommen Sie einen Punkt. Sie können also in diesem Teil insgesamt 12 Punkte erwerben.

Aufgabe 1. Zum Thema Mengen und Abbildungen.

(1) Wann heißt eine Menge $M \neq \emptyset$ abzählbar und wann heißt M überabzählbar. Geben Sie ein Beispiel für eine überabzählbare Menge M.

Eine nicht-leere Menge M heißt abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M$ gibt. Falls es eine solche Abbildung nicht gibt, heißt sie überabzählbar.

Alternativ: M ist abzählbar, wenn es eine injektive Abbildung $\varphi : M \to \mathbb{N}$ gibt. Oder: M ist abzählbar, wenn M endlich ist oder es eine bijektive Abbildung $\varphi : M \to \mathbb{N}$ gibt.

Beispiele für überabzählbare Mengen: $\mathbb{R}$ oder die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ (oder einer anderen unendlichen Menge).

(2) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$. Geben Sie die Definitionen von $f(A)$ und $f^{-1}(B)$.

$f(A) = \{f(a) : \ a \in A\} = \{y \in Y : \ \exists a \in A \text{ mit } f(a) = y\}$

$f^{-1}(B) = \{x \in X : \ f(x) \in B\}$.

Aufgabe 2. Zum Thema Folgen.

(1) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Definieren Sie den Limes Inferior $\underline{\lim} a_n$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es gilt $\underline{\lim} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf\{a_k : k \geq n\}\big)$.

Alternativ: Es ist $\underline{\lim} a_n$ der kleinste Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$. Welche zutreffenden Konvergenzaussagen können Sie für diese Folge formulieren.

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert sie gegen $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sonst konvergiert sie (uneigentlich) gegen $-\infty$.

(3) Geben Sie die Definition einer Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Erfüllt die Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}; k \mapsto n_k$ die Bedingung $n_{k+1} > n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Achtung: Die Bedingung $n_{k+1} \geq n_k$ reicht nicht aus!!!

Alternativ: $k \mapsto n_k$ ist strong monoton wachsend, oder $k > l \Rightarrow n_k > n_l$.

Aufgabe 3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ Funktionen.

(1) Sei $d \in \mathbb{R}$. Was bedeutet $\lim_{x\to a} f(x) = d$? Geben Sie auch eine möglichst einfache Charakterisierung dafür, dass $\lim_{x\to a} f(x) \neq d$ ist.

Möglichkeit 1: Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (a, b), welche gegen a konvergieren, gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = d$. Negation: Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (a, b), welche gegen a konvergiert, für die $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen d konvergiert.

Möglichkeit 2: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in (a, b)$ mit $|x - a| < \delta$ gilt: $|f(x) - d| < \varepsilon$. Negation: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass es für alle $\delta > 0$ ein $x \in (a, b)$ mit $|x - a| < \delta$ gibt, für das aber $|f(x) - d| \geq \varepsilon$ gilt. Diese Negation ist sicher nicht "einfach"—lassen wir aber, wenn korrekt gegeben, trotzdem gelten!

(2) Seien nun $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ gegeben. Formulieren Sie die Regel von L'Hospital (mit allen Voraussetzungen) für den Grenzwert $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Seien $f, g\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar und $f(a) = g(a) = 0$. Ferner gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Existiert dann $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so auch $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und beide Grenzwerte stimmen überein (gilt auch für $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$).

Kommentar: hier waren wir der Korrektur sehr großzügig, etwa wenn die Bedingung $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ vergessen wurde, oder wenn der Fall $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ nicht erwähnt wurde! Wenn aber die Bedingung $f(a) = g(a) = 0$ vergessen wurde gab es Punktabzug!

(3) Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Formulieren Sie den ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Welche Voraussetzungen muss f erfüllen, damit der Satz anwendbar ist.

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Aufgabe 4. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$.

(1) Wie lautet das Quotienten-Kriterium zur Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $0 < \alpha < 1$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt: $a_n \neq 0$ und $|a_{n+1}/a_n| < \alpha$, dann ist die Reihe absolut konvergent. (Wurde auch akzeptiert wenn der $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ richtig benutzt wurde,)

(2) Definieren Sie den Konvergenzradius R einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

$R := \sup\{r \geq 0 : \ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\}$, wobei wir das Supremum einer unbeschränkten Menge als $+\infty$ festlegen.

Alternativ: Sei $\alpha = \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}$. Hierbei setzen wir $\alpha = \infty$ falls die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. Ist $0 < \alpha < \infty$, so ist $R = \frac{1}{\alpha}$. Ist $\alpha = 0$, so setzen wir $R = \infty$ und ist $\alpha = \infty$, so setzen wir $R = 0$

Aufgabe 5. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

(1) Wann heißt f gleichmäßig stetig?

f heißt gleichmäßig stetig, wenn gilt: für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x, x' \in D$ gilt: $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

(2) Seien nun $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Formulieren Sie mindestens zwei von den in der Vorlesung bewiesenen allgemeingültigen Sätzen über f.

f nimmt auf $[a, b]$ ein Minimum und ein Maximum an.

f ist gleichmäßig stetig.

Zwischenwertsatz: Für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(b) \leq y \leq f(a)$ existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y$.

Kommentar: Zumindest bei den Grenzfällen (also den von mir nachkorrigierten Klausuren) war ich großzügig, und habe auch den Satz von Rolle oder einen der Mittelwrtsätze akzeptiert, wenn die zusätzlichen Diefferenzierbarkeits-Voraussetzungen richtig genannt wurden.

Wahr/Falsch-Aufgaben

Für jede der folgenden Aussagen sollen Sie entscheiden, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Schreiben Sie "wahr" bzw. "falsch" neben die Aussage, wenn Sie der Meinung sind, dass die Aussage wahr bzw. falsch ist. Für n richtige Antworten bekommen Sie $\max\{0, n-8\}$ Punkte. Sie können also höchstens 8 Punkte in diesem Aufgabenteil erhalten.

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

(1) Zu jedem $y \in Y$ existiert genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. (falsch)

(2) Es existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$. (falsch)

(3) Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt $A = f^{-1}(f(A))$. (falsch)

Aufgabe 2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(1) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens einen Häufungspunkt. (wahr)

(2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann, wenn jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. (wahr)

(3) Existiert ein $q < 1$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a_n \to 0$. (wahr)

(4) Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \geq N$. (falsch)

Aufgabe 3. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 \leq R \leq \infty$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

(1) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so gilt $R \geq 1$. (wahr)

(2) Es gibt Potenzreihen, die in keinem Punkt $z \in \mathbb{C}$ konvergieren. (falsch)

(3) Ist $|z - z_0| = R$, so konvergiert die Potenzreihe im Punkt z. (falsch)

Aufgabe 4. Seien $f, g : [0,1] \to \mathbb{C}$ Funktionen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

(1) f ist stetig genau dann, wenn f gleichmäßig stetig ist. (wahr)

(2) Ist f stetig und ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|f(0)| \leq |z| \leq |f(1)|$, so existiert ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = z$. (falsch)

(3) Für jede differenzierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} nf(\frac{1}{n}) = f'(0)$. (wahr)

(4) Sind $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = g(0) = 0$ und $g'(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n^2})}{g(\frac{1}{n^2})} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$. (wahr)

(5) Jede monoton fallende Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt. (wahr)

(6) Ist f differenzierbar und besitzt f in $x_0 \in [0,1]$ ein lokales Maximum, so gilt $f'(x_0) = 0$. (falsch)

Rechnen

In den folgenden Aufgaben soll getestet werden, inwieweit Sie die in der Vorlesung besprochenen Rechenverfahren beherrschen. Bitte geben Sie nur die Ergebnisse (ohne Begründungen) an. Für jede richtig gelöste Teilaufgabe erhalten Sie einen Punkt. Sie können in diesem Teil also insgesamt 12 Punkte erwerben.

Aufgabe 1. **(a)** Bringen Sie die komplexe Zahl $(2+i)\overline{(1+3i)}|4-3i|$ auf die Form $x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung: 25-25i

(b) Bestimmen Sie alle vierten Wurzeln aus -1 und geben Sie diese in der Form $x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

Lösung: $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Alternativ: $\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}),\ \cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}),\ \cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4}),\ \cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4})$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte (falls vorhanden) der folgenden Folgen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(a) $a_n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n$. HP: e^{-2}

(b) $a_n = i^n 5^{1/n}$. HP: $1, i, -1, -i$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit:

(a) $a_n = \frac{1}{3^n}$. Antwort: $R = 3$

(b) $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. Antwort: $R = 1$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right) = -\frac{1}{2}$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{n})} - n\right) = 0$

Aufgabe 5. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \left\{\begin{matrix} \frac{\sin^2(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{matrix}\right\}$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung von f in allen Punkten $x \neq 0$.

Antwort: $f'(x) = \frac{2x\sin x\cos x - \sin^2 x}{x^2} \quad (= \frac{x\sin(2x) - \sin^2 x}{x^2})$

(b) Berechnen Sie $f'(0)$, falls diese Ableitung existiert (schreiben Sie "existiert nicht", falls Sie der Meinung sind, dass $f'(0)$ nicht existiert.)

Antwort: $f'(0) = 1$

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 1)$.

(a) Berechnen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima von f (falls solche existieren) und geben Sie die Stellen $x \in \mathbb{R}$ an, an denen diese vorliegen.

Lösung: kein globales Maximum. Lokale Extrema bei -1 und 1.
Lokales und globales Minimum bei $x = 1$ mit $f(1) = 0$.
Lokales Maximum bei -1 mit $f(-1) = 4/e$.

(b) Geben Sie die maximalen Teilintervalle von $\mathbb{R}$ an, auf denen f konvex oder konkav ist.

Lösung: f ist konvex auf $(-\infty, -1 - \sqrt{2}]$ und auf $[-1 + \sqrt{2}, +\infty)$, f ist konkav auf $[-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$.

Beweisen

In diesem Abschnitt sollen Sie relativ einfache Aussagen beweisen. Sie dürfen alle Resultate der Vorlesung benutzen. Für jede richtig gelöste Aufgabe erhalten Sie 3 Punkte. Sie können also in diesem Bereich insgesamt 12 Punkte erreichen.

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Es existiert ein $x \in [0, 1]$ mit $e^x = \frac{1}{x}$.

Beweis: Variante 1: Es gilt $e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow xe^x = 1$. Betrachte also $f : [0, 1] \to \mathbb{R}; f(x) = xe^x$. Dann gilt $f(0) = 0 < 1$ und $f(1) = 2 > 1$. Da f stetig ist existiert daher nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [0, 1]$ mit $f(x) = 1$. Für dieses gilt dan $e^x = \frac{1}{x}$.

Variante 2: Es gilt $e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow e^{-x} = x$. Betrachte $g : [0.1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x} - x$. Dann ist g als Differenz zweier stetiger Funktionen stetig. Es gilt $g(0) = e^0 = 1 > 0$ und $g(1) = e^{-1} - 1 < 0$, da $e > 2$ und daher $e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert daher ein $x \in [0, 1]$ mit $g(x) = 0$, und dann folgt $e^x = \frac{1}{x}$ für dieses x.

Variante 3: Setze $f \colon (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1/x$. Dann ist f als Differenz zweier stetiger Funktionen stetig. Es gilt $f(1) = e^1 - 1 \geq 2 - 1 = 1 > 0$, da $e > 2$ gilt. Andererseits gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 - \lim_{x\to 0} 1/x = -\infty$. Daher gibt es insbesondere ein $x_0 \in (0, 1]$ mit $f(x) < 0$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt nun, dass es ein $x \in [x_0, 1] \subseteq (0, 1]$ gibt mit $f(x) = 0$. Für dieses gilt aber $e^x - 1/x = 0$, also $e^x = 1/x$. Somit folgt die Behauptung.

Weitere Beweisvariante: Anstatt die Konvergenz am linken Rand auszunutzen, kann man auch ein passendes x_0 angeben, etwa $x_0 = 1/2$, denn dann gilt $1/x_0 = 2$ und $e^{1/2} = \sqrt{e} < \sqrt{4} = 2$, also $e^{1/2} - 2 < 0$. Hier haben wir die Abschätzung $e < 4$ benutzt.

Aufgabe 2. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{C}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ absolut konvergent. Zeigen Sie: Dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent.

Beweis: Zunächst beobachten wir: Sind $a, b \geq 0$, so gilt $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, denn es gilt

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) - ab = \frac{1}{2}(a - b)^2 \geq 0.$$

Insbesondere gilt also für jedes $n \in \mathbb{N}$: $|a_n||b_n| \leq |a_n|^2 + |b_n|^2$, wobei wir uns den Faktor $1/2$ geschenkt haben. Somit wird $(|a_n b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ majorisiert von $(|a_n|^2 + |b_n|^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Da nach Voraussetzung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ absolut konvergent sind, gilt dies auch für $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$. Nach dem Majorantenkriterium ist dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent.

Aufgabe 3. Beweisen Sie: Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, so existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(M)$.

Beweis: Setze $a := \inf(M)$. Nach Definition des Infimums ist dann a die größte untere Schranke von M. Ist dann $n \in \mathbb{N}$ beliebig, so ist $a + \frac{1}{n}$ keine untere Schranke von M. Damit existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in M$ mit $a \leq a_n < a + \frac{1}{n}$. Dann folgt $|a_n - a| = a_n - a < \frac{1}{n} \to 0$, also $a_n \to a$.

Aufgabe 4. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$: Sind f und g n-mal differenzierbar, so ist auch $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Erinnerung: $f^{(l)}$ bezeichnet die l-te Ableitung von f, falls diese existiert. Es gilt dann z.B. $f^{(0)} = f$ und $f^{(1)} = f'$. Sie dürfen ohne Beweis die bekannte Formel $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ für $1 \leq k < n$ benutzen.

Beweis: Induktionsanfang: Für $n = 1$ haben wir folgende Aussage: Sind f und g 1-mal differenzierbar, so auch $f \cdot g$, und es gilt mit Produktregel

$$(f \cdot g)^{(1)} = (fg)' = fg' + f'g = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(1-k)},$$

da $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$. Die Formel ist daher für den Fall $n = 1$ bewiesen.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und die Formel sei wahr für n. Seien f und g $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)} &= \left((f \cdot g)^{(n)}\right)' \overset{\text{IV}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&\overset{\text{Summenregel}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&\overset{\text{Produktregel}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&\overset{\text{Umindizieren}}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{((n+1)-k)} \\
&= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1=\binom{n+1}{0}} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1=\binom{n+1}{n+1}} f^{(n+1)} g^{(0)} \\
&\overset{\text{Tip}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

Anmerkung: Die Formel in der Aufgabe macht auch für $n = 0$ Sinn. Man kann daher auch die Induktion bei $n = 0$ anfangen. Der Beweis ist übrigens fast identisch mit dem Beweis der Binomschen Formel aus der Vorlesung.