Vortragsübersicht Seminar Fourieranalysis

1. Trigonometrische Polynome und die Approximation stetiger, periodischer Funktionen (Kapitel 1 und 4)

- T-periodische Funktionen, trigonometrische Polynome (reelle und komplexe Versionen) einführen; Transformation $C(\mathbb{T}) \cong C_T(\mathbb{R})$ kurz erläutern, Reduktion auf den Fall $T = 2\pi$
- kurze Erinnerung Orthonormalsysteme/-basen, Beispiel $\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ auf $L^2(\mathbb{T})$ und reelle Version (a priori nur ONS, vgl. Ende §12 im FA-Skript)
- Fouriertransformation, Fourrierreihe, Fourierpolynome einführen; grundlegende Fragen über Konvergenz der Fourierreihe formulieren
- Satz von Fejér über gleichmäßige Approximation stetiger Funktionen durch trig. Polynome; direkte Folgerungen 4.5, 4.6, $\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ist ONB (ohne Verwendung von Weierstraß wie in der FA-Vorlesung)
(ohne näher auf die Faltung zweier Funktionen einzugehen, evtl. ganz vermeiden)

2. Fourierreihen stückweise stetig diffbarer Funktionen (Kapitel 2)

- Ausgangsfrage: Konvergiert die Fourrierreihe einer Funktion f (punktweise/gleichmäßig/in L^2) gegen f? Unter welchen Bedingungen?
- Satz von Dirichlet: für stückweise stetig diffbare Abbildungen –> punktweise Konvergenz auf Stetigkeitsstellen
- Verbesserung für stetige, stückweise stetig diffbare Abbildungen –> gleichmäßige Konvergenz; Zusammenhang Fourierkoeffizienten von f und f'
- Beispielrechnung Fourierreihenentwicklung Betragsfunktion

3. Die Sägezahnfunktion und das Gibbs-Phänomen (Kapitel 3)

- Konvergenzverhalten der Fourierreihe der Sägezahnfunktion: gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Intervallen ohne Sprungstellen, qualitatives Verhalten an Sprungstellen
- Transformation von Sägezahnfunktion auf allgemeine stückweise stetig diffbare Funktion –> Gibbs–Phänomen

4 Diskrete Abtastung und diskrete Fouriertransformation (Kapitel 5 + Zusatzmaterial nach Absprache)

- Problemformulierung: Rekonstruktion von stetigem $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ aus diskreten Abtastwerten $\{f(n2\pi/N)\}_{n=1}^{N}$.

- Definition diskrete Fourierkoeffizienten; Fehlerabschätzung $\|f - f_d\|$
- Fouriertransformation auf endlichen Gruppen

5 Das isoperimetrische Problem (Kapitel 6)

- Sektorformel von Leibniz, orientierte Flächeninhalte
- Lösung des isoperimetrischen Problems (für stückweise stetig diffbare Kurven)

6 Anwendungen der Fouriertransformation auf partielle DGLs (Kapitel 7 und 8)

- Trennung der Variablen zerlegt (in geeigneten Situationen) eine partielle DGL in ein System gewöhnlicher DGLs
- Fourierreihenentwicklung einer Lösungsfunktion liefert Bedingung an Koeffizienten –> spezielle Lösungen, dann geeignete Überlagerungen solcher
- Beispiel Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$
- Beispiel 1-dimensionale Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u(x,t)$ (das Problem der schwingenden Saite)

7 Faltungen von Funktionen (Kapitel 11, bis 11.9)

- Definition und Eigenschaften der Faltung von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$
- approximative Einsen und Dirac-Folgen
- Definition, Existenz von Testfunktionen
- evtl mit Beweis, dass $C_c(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$

8 Fouriertransformation auf $\mathbb{R}^n$ (Kapitel 11.10-12.4)

- Faltung mit Testfunktionen, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$
- Definition, grundlegende Eigenschaften Fouriertransformation $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \to C_b(\mathbb{R}^n)$
- Zusammenhang Fouriertransformation und Ableitungen

9 Die Umkehrformel und der Plancherel-Isomorphismus (Kapitel 12.5 bis Ende Kapitel 12)

- Erinnerung Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
- spezielle Fixpunkte $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
- Umkehrformel für $\mathcal{F}^{-1}$
- Fortsetzung zu Plancherel-Isomorphismus $\Phi\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$
- Anwendung: Heisenbergsche Ungleichung

10 Poissonsche Summenformel und Radon-Transformation (Kapitel 13)

- Fourierentwicklung für $L^2([0,1]^n)$
- Poissonsche Summenformel: $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(2\pi k) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)$
- Nyquist-Shannon-Abtasttheorem
- Radontransformierte, Anwendung Computertomographie (Abtasttheorem evtl. nur in schriftlicher Ausarbeitung)

11 Distributionen I (Kapitel 14, 15.1–15.3, Rudin)

- Konvergenz auf $C_c^\infty(U)$, Definition Distributionen, $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$
- Produkt $D'(U) \times C^\infty(U) \to D'(U)$
- Ableitung von Distributionen
- Raum der temperierten Distributionen $S'(\mathbb{R}^n)$, Einbettung $S'(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$
- Vergleich mit lokalkonvexer Topologie aus FA (siehe Rudin)

12 Distributionen II (Kapitel 15.4 bis Ende Kapitel 15)

- $\mathcal{F}\colon S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist topologischer Isomorphismus
- Fortsetzung zu top. Isomorphismus $\mathcal{F}'\colon S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$
- Umkehrformel für $\mathcal{F}'$

13 Faltung von Distributionen (Kapitel 16)

- Definition, Eigenschaften Faltung von Distributionen
- Zusammenhang Ableitungen, Fouriertransformation

14 Fundamentallösungen für lineare PDEs mit konstanten Koeffizienten (Kapitel 17)

- Bedeutung Fundamentallösung $P(D)\chi = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta_0 \overset{\forall\varphi}{\Rightarrow} P(D)(\chi * \varphi) = \varphi$
- Satz von Ehrenpreis-Malgrange (ohne Beweis) über Existenz von Fundamentallösungen
- Bsp: Fundamentallösung des Laplace-Operators

Literatur

[Echterhoff] S. Echterhoff, Skript zur Vorlesung *Fourieranalysis*, SS2013, verfügbar auf Seminarhomepage

[Rudin] W. Rudin, *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 2. Auflage, 1991.