Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS2015/16, Blatt 11

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

(1) mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen;
(2) mit Hilfe von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen;
(3) durch Entwicklung nach einer (möglichst gut gewählten) Zeile oder Spalte;
(4) mit allen Tricks!

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1.(a) Berechnen Sie mit möglichst wenig Rechenaufwand die Determinante der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix invertierbar?

(b) Berechnen Sie das Volumen des Spats

$$\mathrm{Spat}(v_1, \ldots, v_5) = \left\{ v = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i v_i : \lambda_i \in [0,1] \text{ für } 1 \leq i \leq 5 \right\} \subseteq \mathbb{R}^5$$

der von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A \in M(5 \times 5, \mathbb{F}_2)$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Wir sagen ein Körper K hat *positive Charakteristik*, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $n \cdot 1 := \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n\text{-mal}} = 0$. In diesem Fall heißt die kleinste natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$ mit $p \cdot 1 = 0$ die *Charakteristik* von K [1] und wir schreiben dann $\mathrm{Char}(K) := p$. Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $n \cdot 1 \neq 0$, so setzen wir $\mathrm{Char}(K) := 0$.

(1) Geben Sie je ein Beispiel für einen Körper K mit $\mathrm{Char}(K) > 0$ und $\mathrm{Char}(K) = 0$.

(2) Zeigen Sie: Ist K ein Körper mit $\mathrm{Char}(K) \neq 2$, so kann Bedingung (D2) in Definition 13.1 durch die Bedingung (D4) aus Satz 13.2 ersetzt werden, d.h., es gilt $(D1) \wedge (D2) \wedge (D3) \Leftrightarrow (D1) \wedge (D4) \wedge (D3)$.

Aufgabe 4. *Regel von Sarrus.* Zeigen Sie: Die Determinante einer 3×3-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, K)$ ist gegeben durch die Formel

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Als Merkregel werden die ersten beiden Spalten der Matrix rechts neben der Matrix noch einmal wiederholt, und die Koeffizienten längs der Hauptdiagonalen (bzw. Nebendiagonalen) multipliziert und mit positiven (bzw. negativen) Vorzeichen summiert:

$$\begin{array}{cccccc}
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & + & + & +
\end{array}$$

Warnung: Diese Regel gilt nur für 3×3-Matrizen !

Abgabe: Montag, den 25.01. 2016 um 8:30Uhr

[1] Man kann beweisen, dass p immer eine Primzahl ist!