Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS2015/15, Blatt 2

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $f_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; f_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,
(b) $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1, 2, \ldots, n^2\}; f(x) = x^2 - 1$,
(c) $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, n\}; f(x) = x - 1$.

Aufgabe 2. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Geben Sie korrekte Beschreibungen der Aussagen: **a)** f ist nicht injektiv, **b)** f ist nicht surjektiv, und **c)** f ist nicht bijektiv.

Aufgabe 3. Beweisen Sie Lemma 2.14 der Vorlesung: Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann gelten:

(1) Sind f und g injektiv, so auch $g \circ f$.
(2) Sind f und g surjektiv, so auch $g \circ f$.
(3) Sind f und g bijektiv, so auch $g \circ f$.

Aufgabe 4. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und sei $A \subseteq X$. Dann heißt $f|_A : A \to Y$, mit $f|_A(a) = f(a)$ für alle $a \in A$, die *Einschränkung* von f auf A. Beantworten Sie die folgenden Fragen (mit Begründung):

(1) Wenn f injektiv ist, folgt dann auch $f|_A$ injektiv?
(2) Folgt aus f surjektiv auch $f|_A$ surjektiv?

Aufgabe 5. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Zeigen Sie: Es existiert ein größtes Element von M, d.h., es existiert ein $m_0 \in M$ mit $m \leq m_0$ für alle $m \in M$.
Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion nach $n = |M|$. Benutzen Sie ohne Beweis die aus der Schule bekannte Tatsache, dass für je zwei Elemente $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ immer gilt: Entweder ist $n < m$ oder es ist $m < n$.

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Das direkte Produkt $X \times Y$ zweier Mengen X und Y ist definiert als die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$, also

$$X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X, y \in Y\}.$$

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist der *Graph* $G(f)$ von f definiert als

$$G(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Zeigen Sie:

(1) Ist $G(f)$ der Graph von f, so ist die Abbildung $g : G(f) \to X; g(x, y) = x$ bijektiv. Geben Sie auch eine Umkehrabbildung von g an!

(2) Sei $B \subseteq X \times Y$ eine Teilmenge, so dass die Abbildung $g : B \to X; g(x, y) = x$ bijektiv ist. Dann ist B der Graph einer Abbildung $f : X \to Y$.

Aufgabe 2. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(1) f ist genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

(2) f ist genau dann surjektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ existiert, mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}$, so existiert ein kleinstes Element in M.

Aufgabe 4. Eine bijektive Abbildung $P : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ heißt "Permutation" von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Beweisen Sie (z.B. mit vollständiger Induktion): Es gibt genau $n!$ Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Abgabe: Montag, den 9.11. 2015 um 8:30Uhr