Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS2015/16, Blatt 3

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem mit den reellen Unbekannten $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$:

$$\begin{aligned} 5(x_1 + 3x_4 - x_6) &= 1 \\ x_3 &= 4x_5 - x_1 \\ 6x_2 - 7x_5 &= x_2 \\ 3x_1 + 2(x_5 - x_6) &= 2 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Matrix A und einen Vektor b, so dass das obige System äquivalent zur Gleichung $Ax = b$ ist, mit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^t$.
Zur Schreibweise: Für einen Zeilenvektor $(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnet

$$(x_1, \ldots, x_n)^t := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

den "zugehörigen" Spaltenvektor mit denselben Einträgen.

Aufgabe 2. Für welche der folgenden Matrizen A und Vektoren x und b macht das Gleichungssystem $Ax = b$ Sinn? Verändern Sie eventuell die Vektoren x und b, damit das System sinnvoll wird.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Produkte Ax mit A und x wie folgt:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$. **(b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{R})$ und $b = (1, 0, 0)^t \in \mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie alle Lösungen $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ der Gleichung $Ax = b$.

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1 Entscheiden Sie ob das folgende (reelle) lineare Gleichungssystem lösbar ist. Wenn ja, so bestimmen Sie alle Lösungen.

$$\begin{aligned} 2x_4 + \ 5x_3 + 3x_2 + \ x_1 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_5 + 10x_3 + \ x_4 + 9x_2 &= 0 \\ 7x_3 + \ 2x_2 + 3x_4 - \ x_5 &= 3 \\ 12x_3 + \ x_5 + \ 2x_1 + 2x_4 + 8x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie ein (reelles) Polynom 4.ten Grades

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4\,, \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, \ldots, 4\,,$$

derart dass die Funktion p an den Stellen $0, \pm 1, \pm 2$ die folgenden Funktionswerte annimmt:

$$p(0) = p(1) = p(-1) = 1 \quad \text{und} \quad p(2) = p(-2) = 2.$$

(Hinweis: Übersetzen Sie dieses Problem in ein lineares Gleichungssystem für $a_4, \ldots, a_1, a_0$.)

Aufgabe 3. Bringen Sie die folgenden Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ax = c$ auf Zeilenstufenform wie in Satz 3.11 der Vorlesung und überprüfen Sie die Systeme auf ihre Lösbarkeit. Bestimmen Sie dann, sofern lösbar, alle (reellen) Lösungen.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie unter Angabe aller Rechenschritte, für welche $t \in \mathbb{R}$ das (reelle) lineare Gleichungssystem in Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & | & 12t \\ 2 & 12 & 7 & | & 12t + 7 \\ 1 & 10 & 6 & | & 7t + 8 \end{pmatrix}$$

lösbar ist und geben Sie gegebenenfalls alle Lösungen an.

Abgabe: Montag, den 16.11. 2015 um 8:30Uhr