Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS2015/16, Blatt 5

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Welche der folgenden Systeme $(V, +, \cdot)$ sind Vektorräume über $\mathbb{R}$?

(1) Sei $V = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : z = 2x + y\}$ versehen mit der von $\mathbb{R}^3$ vererbten Addition und der Multiplikation mit Skalaren.

(2) Sei $V = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : z = 2x + y^2\}$ versehen mit der von $\mathbb{R}^3$ vererbten Addition und der Multiplikation mit Skalaren.

(3) Sei $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Folgen in $\mathbb{R}$ versehen mit der Addition $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Multiplikation mit Skalaren: $\lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(4) Sei V die Menge aller Nullfolgen in $\mathbb{R}$, d.h. die Menge aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ versehen mit Addition und Multiplikation mit Skalaren wie in (3).

(5) Sei V die Menge aller reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ mit Addition und Multiplikation mit Skalaren wie in (3).

Aufgabe 2. Welche der folgenden Abbildungen $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind linear:

$$F_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x \\ 3y \end{pmatrix}, \quad F_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x \\ 3y + 1 \end{pmatrix}, \quad F_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2xy \\ 3y \end{pmatrix}.$$

Zur Erinnerung: Ist K ein Körper, so ist $K[T]$ der Vektorraum aller Polynome über K wie in 5.2 (7) der Vorlesung. Ist dann $x \in K$ und $p \in K[T]$, so können wir wie in 5.8 (c) der Vorlesung die Auswertung

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in K \quad \text{für das Polynom} \quad p(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$$

definieren. Beachte: $K[T]$ ist nicht nur ein K-Vektorraum, sondern auch ein Ring mit Multiplikation

$$(p \centerdot q)(T) = \sum_{k=0}^{n+m} \Big(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\Big) T^k \quad \text{wenn} \quad p(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k,\ \ q(T) = \sum_{k=0}^{m} b_k T^k$$

(und $a_j = b_l = 0$ für $j > n, l > m$). Ferner sei $K_n[T] \subseteq K[T]$ der Untervektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: $K_n[T]$ ist ein Untervektorraum von $K[T]$. Zeigen Sie ferner: Sind $p, q \in K[T]$ mit $p, q \neq 0$, so gilt immer $\mathrm{grad}(p \centerdot q) = \mathrm{grad}(p) + \mathrm{grad}(q)$.

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Für eine Menge $X \neq \emptyset$ und einen Körper K sei $(\mathrm{Abb}(X,K),+,\cdot)$ der K-Vektorraum aller Abbildungen $f: X \to K$ wie in §5 der Vorlesung. Zeigen Sie: Ist $X = \{1,\ldots,n\}$, so ist

$$F : \mathrm{Abb}(X,K) \to K^n; F(f) = (f(1),\ldots,f(n))^t$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Aufgabe 2. Sei $\mathrm{Abb}(X,K)$ wie in Aufgabe 1. Wir definieren ein Produkt "$\bullet$" auf $\mathrm{Abb}(X,K)$ durch $(f,g) \mapsto f \bullet g$ mit $(f \bullet g)(x) = f(x)g(x)$ das *punktweise Produkt* von f mit g. Zeigen Sie:
(a) $(\mathrm{Abb}(X,K),+,\bullet)$ ist ein kommutativer Ring mit 1.
(b) Für jedes $p \in K[T]$ sei $f_p \in \mathrm{Abb}(K,K)$ gegeben durch $f_p(x) = p(x)$. Dann ist

$$F : K[T] \to \mathrm{Abb}(K,K); F(p) = f_p$$

K-linear und zusätzlich ein *Ring-Homomorphismus*, d.h., für alle $p,q \in K[T]$ gilt

$$F(p+q) = F(p) + F(q) \quad \text{und} \quad F(p \bullet q) = F(p) \bullet F(q).$$

(c) Sei nun $K = \{0,1\}$ der Körper mit zwei Elementen. Ist F dann injektiv und/oder surjektiv?

Aufgabe 3. Sei nun $K = \mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen und sei $\mathbb{R}_4[T]$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 4. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$F : \mathbb{R}_4[T] \to \mathbb{R}^5; p \mapsto (p(0),p(1),p(2),p(3),p(4))^t$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.
Hinweis: Stellen Sie für $b = (b_1,\ldots,b_5)^t \in \mathbb{R}^5$ ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = b$ für die Unbekannten $x = (a_0,a_1,\ldots,a_4)^t$ auf, so dass für das Polynom $p[T] = a_0 + a_1T + \cdots + a_4T^4$ gilt: $F(p) = (b_1,\ldots,b_5)^t$.

Aufgabe 4. Seien $t_1,\ldots,t_n \in K$ mit $t_i \neq t_j$ für alle $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ mit $i \neq j$ gegeben. Zeigen Sie: Dann ist $F : K_{n-1}[T] \to K^n; F(p) = (p(t_1),\ldots,p(t_n))^t \in \mathbb{R}^n$ linear und surjektiv.
Hinweis: Konstruieren Sie zunächst für alle $1 \leq i \leq n$ ein Polynom p_i mit $\mathrm{grad}(p_i) = n-1$, $p_i(t_i) = 1$ und $p_i(t_j) = 0$ für alle $j \neq i$ (etwa als geeignetes Produkt von linearen Polynomen).

Abgabe: Montag, den 30.11. 2015 um 8:30Uhr