Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS2015/16, Blatt 6

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung

$$F\big((x_1, x_2, x_3)^t\big) = (x_1 + x_2, 3x_3 - x_2, x_1 + x_2 + x_3, 4x_1)^t.$$

Berechnen Sie die Darstellungsmatrix A_F von F, d.h. die eindeutig bestimmte Matrix A_F, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt: $F(x) = A_F \cdot x$.

Aufgabe 2. Seien A, B, C die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der Produkte

$$AA, AB, AC, BB, BA, BC, CC, CA, CB$$

machen Sinn? Berechnen Sie alle sinnvollen Produkte.

Aufgabe 3. Welche der folgenden linearen Abbildungen F_1, F_2, F_3 sind Isomorphismen? Berechnen Sie gegebenenfalls eine Umkehrabbildung.

$$F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; F\big((x_1, x_2)^t\big) = (x_1 - x_2, 2x_1, 3x_2)^t$$
$$F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; F\big((x_1, x_2, x_3)^t\big) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_3 - x_1, x_2)^t$$
$$F_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; F\big((x_1, x_2, x_3)^t\big) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_3 - x_1)^t.$$

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Seien $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4$ und $G : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$ die $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen

$$F\big((z_1, z_2)^t\big) = (iz_2 + z_1, (1+i)(z_1 + 3z_2), \frac{1}{1-i}(2z_1 + z_2), z_1)^t$$

und

$$G\big((z_1, z_2, z_3, z_4)\big) = (4z_4 + z_1, 2i(z_3 - z_2))^t.$$

Berechnen Sie die (komplexen!) Darstellungsmatrizen $A_F, A_G, A_{F\circ G}, A_{G\circ F}$. Schreiben Sie dabei alle Einträge der jeweiligen Matrizen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie alle linearen Abbildungen $F, G, F \circ G, G \circ F$ aus Aufgabe 1 auf Bijektivität und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Abbildung.

Aufgabe 3. Sei $n \leq m$ und sei $F : K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung. Sei $A \in M(m \times n, K)$ die Darstellungsmatrix von F, d.h., für alle $x \in K^n$ gilt $F(x) = A \cdot x$. Zeigen Sie: F ist injektiv genau dann, wenn sich die Matrix A durch endlich viele elementare Zeilenumformungen auf die Gestalt

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

bringen lässt. Mit anderen Worten $\tilde{A}$ hat die Blockgestallt $\tilde{A} = \begin{pmatrix} E_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, wobei E_n die Einheitsmatrix in $M(n \times n, K)$ ist und $\mathbf{0}$ die Nullmatrix in $M(k \times n, K)$ ist, wobei $k = n - m$ (ist $n = m$ so taucht der Block $\mathbf{0}$ hier nicht auf).

Hinweis: Studieren Sie den Beweis von Satz 6.11 der Vorlesung.

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die folgenden Matrizen A_t, $t \in \mathbb{R}$ auf Invertierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix A_t^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & t \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Montag, den 07.12. 2015 um 8:30Uhr