Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS2015/16, Blatt 7

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Schreiben Sie A als Produkt von Elementarmatrizen.

Aufgabe 2.(a) Wiederholen Sie die Begriffe "linear unabhängig" und "linear abhängig".

(b) Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie: Ist einer der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ der Nullvektor, so sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig.

(c) Zeigen Sie ferner: Existiert ein beliebiges Teilsystem $v_{i_1}, \ldots, v_{i_l}$ von $v_1, \ldots, v_n$ (d.h. $i_1, \ldots, i_l \in \{1, \ldots, n\}$ und $i_i \neq i_j$ falls $i \neq j$), so dass $v_{i_1}, \ldots, v_{i_l}$ linear abhängig ist, dann ist auch $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig.

(d) Zeigen Sie umgekehrt: Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, so ist auch jedes Teilsystem $v_{i_1}, \ldots, v_{i_l}$ von $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

(e) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ seien linear abhängig. Ist dann auch jedes Teilsystem $v_{i_1}, \ldots, v_{i_l}$ von $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig?

Aufgabe 3. Es seien $v_1, \ldots, v_k \in K^n$ gegeben und sei $A = (v_1, \ldots, v_k) \in M(n \times k, K)$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \ldots, v_k$. Beweisen Sie: Es git

$$v_1, \ldots, v_n \text{ sind linear unabhängig } \Leftrightarrow \text{ Kern}(A) = \{0\}.$$

Hinweis: Überlegen Sie zunächst: Für $x = (x_1, \ldots, x_k)^t \in K^k$ gilt $Ax = \sum_{j=1}^{k} x_j v_j$.

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die folgenden Systeme von Vektoren auf lineare (Un-)Abhängigkeit:

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1 (a). Bestimmen Sie (analog zu Beispiel 7.6 aus der Vorlesung) *Elementar-Matrizen* $D_1, \ldots, D_l \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $F_1, \ldots, F_r \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ derart, dass

$$D_l \cdots D_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot F_1 \cdots F_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $A \in M(m \times n, K)$ eine Matrix. Beweisen Sie: Dann existieren ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n, m$ und Matrizen $D \in \mathrm{GL}(m, K)$ und $F \in GL(n, K)$ mit

$$A = D\tilde{E}_k H.$$

Hierbei ist $\tilde{E}_k$ die Blockmatrix $\tilde{E}_k = \begin{pmatrix} E_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{m-k,k} & 0_{m-k,n-k} \end{pmatrix} \in M(m \times n, K)$.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die folgenden Systeme von Vektoren auf lineare (Un-)Abhängigkeit:

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ t \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

(2) $p_1, p_1, p_3, p_4 \in \mathbb{R}[T]$ mit

$$p_1(T) = T + T^2 - T^3, \quad p_2(T) = T - T^2 + T^3,$$
$$p_3(T) = 1 + T^2 - T^3, \quad p_4(T) = 1 + T.$$

Aufgabe 3. Es seien $v_1, \ldots, v_n \in K^n$ gegeben und sei $A = (v_1, \ldots, v_n) \in M(n \times n, K)$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \ldots v_n$. Sei $F_A : K^n \to K^n, F_A(x) = Ax$ die zugehörige lineare Abbildung. Zeigen Sie: Dann sind äquivalent:

(1) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist eine Basis von K^n.
(2) $F_A : K^n \to K^n$ ist injektiv.
(3) $F_A : K^n \to K^n$ ist bijektiv.
(4) A ist invertierbar.

Hinweis: Natürlich dürfen Sie alle geeigneten Resultate der Vorlesung nutzen!

Aufgabe 4. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Beweisen Sie:

(1) Ist F injektiv und sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, so sind auch $F(v_1), \ldots, F(v_n) \in W$ linear unabhängig.
(2) Sind $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ linear unabhängig, so sind auch $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Abgabe: Montag, den 14.12. 2015 um 8:30Uhr