

**Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II, SoSe 2016,
Blatt 1**

Mündliche Aufgaben

Die Aufgaben aus diesem Blatt bestehen zu einem großen Teil aus den Aufgaben von Blatt 13 der LA1. Sie dienen vor allem der Wiederholung der Inhalte von LA1, §16. Das Verständnis dieses Abschnitts ist eine wichtige Grundlage zum Verständnis des Stoffes der Linearen Algebra II! Die ersten schriftlichen Aufgaben finden sich in Blatt2 zur LA2.

Aufgabe 1. Arbeiten Sie den Anhang zur Darstellungsmatrix durch. Bearbeiten Sie dann die folgende Aufgabe:

$$\text{Es seien } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ und } w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

Seien $V = \text{LH}\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$ und $W = \text{LH}\{w_1, w_2\} \subseteq \mathbb{R}^5$.

- (1) Zeigen Sie: $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Basis von V und $\mathcal{C} = \{w_1, w_2\}$ ist eine Basis von W .
- (2) Es existierte genau eine lineare Abbildung $F : V \rightarrow W$ mit

$$F(v_1) = w_1 + w_2, \quad F(v_2) = w_1 - w_2, \quad \text{and} \quad F(v_3) = 5w_1 + 4w_2.$$

- (3) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix ${}^{\mathcal{C}}A_F^{\mathcal{B}}$ von F bezüglich der Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} .
- (4) Berechnen Sie eine Basis von $\text{Kern}(F) \subseteq V$.

Aufgabe 2. Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$. Wiederholen Sie die Begriffe "Diagonalisierbarkeit", "Eigenwert" und "Eigenvektor" eines Endomorphismus $F : V \rightarrow V$ (bzw. einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$). Wiederholen Sie auch die Argumente dafür, dass die Eigenwerte von F genau die Nullstellen der charakteristischen Polynomfunktion $\chi_F : K \rightarrow K$ sind.

Zur Bezeichnung: Ist $A \in M(n \times n, K)$ so sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von A definiert als die Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung $F_A : K^n \rightarrow K^n; F_A(x) = A \cdot x$.

Aufgabe 3. Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und sei $F : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus von V . Sei $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ eine Basis von V und sei $A = A_F^{\tilde{\mathcal{B}}}$ die Darstellungsmatrix von F bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$. Machen Sie sich die folgenden Sachverhalte klar:

- (1) Ist $\lambda \in K$, so ist λ ein Eigenwert von F genau dann, wenn λ ein Eigenwert

von A ist, und für einen Vektor $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n$ gilt: s ist genau dann ein

Eigenvektor zum Eigenwert λ für A , wenn $v = \sum_{i=1}^n s_i \tilde{v}_i$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ für F ist.

- (2) Ist $S \in GL(n, K)$ mit $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, so sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigen-

werte von A (und von F) und die Spalten $s_1, \dots, s_n \in K^n$ von S bilden eine Basis $\{s_1, \dots, s_n\}$ aus Eigenvektoren von A für K^n . Hierbei ist s_i ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i für alle $1 \leq i \leq n$.

- (3) Ist S wie in (2), und sind $v_1, \dots, v_n \in V$ gegeben durch $v_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} \tilde{v}_i$, so ist $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis aus Eigenvektoren von F und es gilt

$$A_F^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist v_i ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i für alle $1 \leq i \leq n$.

- (4) Zeigen Sie: Ist \mathcal{B} wie in (3), so gilt

$$\chi_F(\lambda) = \det(\lambda \text{id}_V - F) = \det(\lambda E_n - A_F^{\mathcal{B}}) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i).$$

Aufgabe 4. (a) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Berechnen Sie das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte und Eigenräume von A (über \mathbb{R} !).

(b) Sei nun $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$. Berechnen Sie das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte und Eigenräume von A (über \mathbb{C} !).

(c) Untersuchen Sie in beiden Fällen die Matrix A auf Diagonalisierbarkeit, und berechnen Sie gegebenenfalls eine Matrix $S \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5. Für einen Körper K sei $\text{Abb}(\mathbb{R}, K)$ der K -Vektorraum aller K -wertigen Funktionen auf \mathbb{R} . Sei $V = \text{LH}\{\cos, \sin, \exp\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie:

- (1) $\mathcal{B} = \{\cos, \sin, \exp\}$ ist eine Basis von V .
- (2) Für jede Funktion $f \in V$ gilt auch $f' \in V$, wobei f' die Ableitung von f bezeichnet, und die Abbildung $D : V \rightarrow V; Df := f'$ ist \mathbb{R} -linear.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $A = A_D^{\mathcal{B}}$ und berechnen Sie das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte und Eigenräume von D . Ist D diagonalisierbar?

(c) Sei nun $V = \text{LH}\{\cos, \sin, \exp\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dann ist V ein \mathbb{C} -Vektorraum und $D : V \rightarrow V, Df = f'$ ist \mathbb{C} -linear (eine \mathbb{C} -wertige Funktion heißt differenzierbar, wenn $\text{Re } f$ und $\text{Im } f$ differenzierbar sind, und dann gilt $f' = (\text{Re } f)' + (\text{Im } f)'$). Zeigen Sie, dass $D : V \rightarrow V$ diagonalisierbar ist und berechnen Sie eine Basis aus Eigenvektoren für D .

Aufgabe 6. Seien $p, q \in \mathbb{R}[T]$ gegeben durch $p(T) = T^8 = 5T^6 - 9T^5 + 3T^2 - T + 1$ und $q(T) = T^4 + 3$. Berechnen Sie Polynome $h, r \in \mathbb{R}[T]$ mit $\text{grad}(r) < \text{grad}(q)$ und $p = hq + r$ wie in Satz 1.5 der Vorlesung.

Aufgabe 7. (a) Sei $p(T) = T^6 + T^4 - T^2 - 1 \in \mathbb{R}[T]$. Berechnen Sie die Zerlegung

$$p(T) = q(T)(T - \lambda_1)^{n_1} \cdots (T - \lambda_l)^{n_l}$$

wie in Satz 1.6 der Vorlesung. Wie lauten in diesem die algebraischen Vielfachheiten der Nullstellen von p ?

(b) Berechnen Sie nun eine entsprechende Zerlegung des Polynoms p aufgefasst als Element in $\mathbb{C}[T]$.

Zur Darstellungsmatrix linearer Abbildungen

Aufgrund einiger Nachfragen habe ich den Eindruck bekommen, dass einigen Studierenden der Begriff der Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $F : V \rightarrow W$ zwischen endlichdimensionalen K -Vektorräumen noch Probleme bereitet. Ich habe mir daher Gedanken gemacht, wie man diesen Teil des Stoffes noch etwas besser erklären könnte. Hier einige Anmerkungen dazu, die Sie als Ergänzung zur Vorlesung auffassen sollten.

Wahl einer Basis/Koordinatensystems. Ist V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V , so erhalten wir abhängig von der Basis \mathcal{B} einen Isomorphismus

$$\Phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow K^n$$

der durch die Vorschrift $\Phi_{\mathcal{B}}(v_j) = e_j$, für $j = 1, \dots, n$, festgelegt ist. Hierbei bezeichnet $\mathcal{S} = \{e_1, \dots, e_n\}$ die Standard-Basis des K^n . Ist $v \in V$ ein beliebiger Vektor, so besitzt v eine eindeutige Darstellung $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$ für geeignete (und eindeutig festgelegte) Koeffizienten $x_1, \dots, x_n \in K$. Ist dann $x = (x_1, \dots, x_n)^t = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, so folgt

$$\Phi_{\mathcal{B}}(v) = \Phi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{j=1}^n x_j v_j\right) \stackrel{\text{linear}}{=} \sum_{j=1}^n x_j \Phi_{\mathcal{B}}(v_j) = \sum_{j=1}^n x_j e_j = x.$$

Umgekehrt folgt natürlich $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(x) = \sum_{j=1}^n x_j v_j$ für die Umkehrabbildung $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} : K^n \rightarrow V$. An dieser Stelle macht es vielleicht Sinn eine **neue Notation** einzuführen: Ist $v \in V$, so setzen wir

$${}^{\mathcal{B}}[v] := \Phi_{\mathcal{B}}(v) \in K^n.$$

In der obigen Diskussion ist dann ${}^{\mathcal{B}}[v] = x$. Sind dann ${}^{\mathcal{B}}[v]_1, \dots, {}^{\mathcal{B}}[v]_n \in K$ die Koeffizienten von ${}^{\mathcal{B}}[v]$, so gilt $v = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}({}^{\mathcal{B}}[v]) = \sum_{j=1}^n {}^{\mathcal{B}}[v]_j v_j$.

Denkweise: Wir stellen uns die Basis \mathcal{B} als Koordinatensystem im Vektorraum V vor. Der Vektor ${}^{\mathcal{B}}[v] \in K^n$ gibt dann die **Koordinaten** des (Orts-)Vektors v bezüglich dieses Koordinatensystems an! Es ist dann auch sofort klar, dass die Koordinaten stark von dem gegebenen Koordinatensystem \mathcal{B} abhängen!

Die Darstellungsmatrix. Der Sonderfall $F : K^n \rightarrow K^m$.

Ist $F : K^n \rightarrow K^m$ eine lineare Abbildung, so existiert genau eine Matrix $A_F \in M(m \times n, K)$ mit $F(x) = A_F \cdot x$, wobei $A_F \cdot x$ das Produkt der Matrix A_F mit dem Vektor $x \in K^n$ bezeichnet. Ist $A_F = (a_1, \dots, a_n)$, so gilt

$$A_F \cdot e_j = a_j \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Gilt $A_F \cdot x = F(x)$ für alle $x \in K^n$, so folgt $F(e_j) = A_F \cdot e_j = a_j$ für alle $1 \leq j \leq n$, und daher folgt die Formel

$$A_F = (F(e_1), \dots, F(e_n)).$$

Definieren wir umgekehrt die Matrix A_F durch die obige Formel, so folgt für alle $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in K^n$:

$$A_F \cdot x = A_F \cdot \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) \stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^n x_j (A_F \cdot e_j) = \sum_{j=1}^n x_j F(e_j) = F\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = F(x).$$

Die Gleichung (*) folgt aus der leicht zu verifizierenden Tatsache, dass für jede Matrix $A \in M(m \times n, K)$ die Abbildung $F_A : K^n \rightarrow K^m, F_A(x) = A \cdot x$ linear ist.

Die Darstellungsmatrix. Der allgemeine Fall.

Wir wollen jetzt sehen, dass man auch für beliebige endlichdimensionale K -Vektorräume V und W die linearen Abbildungen $F : V \rightarrow W$ mit Hilfe von Matrizen beschreiben kann. Hierzu ist es aber erforderlich, Basen (d.h. Koordinatensysteme) für V und W zu wählen: Im folgenden sei $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von W . Wir erhalten dann, wie oben erklärt, Isomorphismen

$$\Phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow K^n; \Phi_{\mathcal{B}}(v) = {}^{\mathcal{B}}[v] \quad \text{und} \quad \Phi_{\mathcal{C}} : W \rightarrow K^m; \Phi_{\mathcal{C}}(w) = {}^{\mathcal{C}}[w].$$

Zur Erinnerung: Es gelten dann

$$v = \sum_{j=1}^n {}^{\mathcal{B}}[v]_j v_j \quad \text{und} \quad w = \sum_{i=1}^m {}^{\mathcal{C}}[w]_i w_i,$$

wobei ${}^{\mathcal{B}}[v]_1, \dots, {}^{\mathcal{B}}[v]_n \in K$ die Koeffizienten von ${}^{\mathcal{B}}[v]$ und ${}^{\mathcal{C}}[w]_1, \dots, {}^{\mathcal{C}}[w]_m \in K$ die Koeffizienten von ${}^{\mathcal{C}}[w]$ bezeichnen.

Sei nun $F : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Wir wollen dann eine Matrix

$${}^{\mathcal{C}}A_F^{\mathcal{B}} \in M(m \times n, K)$$

finden, so, dass die Koordinaten ${}^{\mathcal{C}}[F(v)] \in K^m$ des Vektors $F(v) \in W$ gegeben sind durch Multiplikation der Koordinaten ${}^{\mathcal{B}}[v]$ von $v \in V$, d.h. für alle $v \in V$ soll die folgende Gleichung gelten:

$$(1) \quad {}^{\mathcal{C}}[F(v)] = {}^{\mathcal{C}}A_F^{\mathcal{B}} \cdot {}^{\mathcal{B}}[v].$$

Benutzt man die Tatsache, dass ${}^{\mathcal{C}}[F(v)] = \Phi_{\mathcal{C}}(F(v))$ und ${}^{\mathcal{B}}[v] = \Phi_{\mathcal{B}}(v)$, so ist die obige Gleichung äquivalent zu

$$(2) \quad \Phi_{\mathcal{C}}(F(v)) = {}^{\mathcal{C}}A_F^{\mathcal{B}} \cdot \Phi_{\mathcal{B}}(v),$$

was gerade bedeutet, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ \Phi_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{C}} \\ K^n & \xrightarrow{{}^{\mathcal{C}}A_F^{\mathcal{B}}} & K^m \end{array}$$

für $A = {}^{\mathcal{C}}A_F^{\mathcal{B}}$ kommutiert (vergleiche Bemerkung 10.2 der Vorlesung). Die lineare Abbildung $F : V \rightarrow W$ wird also **auf der Ebene der Koordinaten** durch Multiplikation mit der Matrix ${}^{\mathcal{C}}A_F^{\mathcal{B}}$ beschrieben.

Beachten Sie: Hierbei wird **nicht** der Vektor v mit der Matrix ${}^{\mathcal{C}}A_F^{\mathcal{B}}$ multipliziert (das macht im Allgemeinen auch gar keinen Sinn, denn ist z.B. V der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n-1$, so sind die Elemente von V Polynome, und für solche ist das Produkt mit einer Matrix nicht definiert), sondern wir multiplizieren den Vektor ${}^{\mathcal{B}}[v] \in K^n$ der Koordinaten von v bezüglich \mathcal{B} mit der Matrix ${}^{\mathcal{C}}A_F^{\mathcal{B}}$ und erhalten dann den Vektor ${}^{\mathcal{C}}[F(v)] \in K^m$ der Koordinaten von $F(v)$ bezüglich \mathcal{C} !

Nachdem wir nun geklärt haben, was die Darstellungsmatrix leisten soll, ist es auch leicht, die richtige Formel hierfür herzuleiten: Schreiben wir ${}^{\mathcal{C}}A_F^{\mathcal{B}} = (a_1, \dots, a_n)$, so erhalten wir mit (1) durch Einsetzen der Basisvektoren v_1, \dots, v_n von V die Gleichungen

$${}^{\mathcal{C}}[F(v_j)] = {}^{\mathcal{C}}A_F^{\mathcal{B}} \cdot {}^{\mathcal{B}}[v_j] = {}^{\mathcal{C}}A_F^{\mathcal{B}} \cdot e_j = a_j,$$

für alle $1 \leq j \leq n$. Das heißt die j -te Spalte von ${}^{\mathcal{C}}A_F^{\mathcal{B}}$ ist gerade der Koordinatenvektor ${}^{\mathcal{C}}[F(v_j)] \in K^m$ von $F(v_j)$ bezüglich \mathcal{C} . Ist ${}^{\mathcal{C}}A_F^{\mathcal{B}} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, so folgt die Formel

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i,$$

die Sie aus 10.1 der Vorlesung kennen. Wie in der Vorlesung gezeigt, gilt für die so definierte Matrix die Gleichung (2), und dann auch die dazu äquivalente Gleichung (1).