Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II, SoSe 2016, Blatt 3

Mündliche Aufgaben

Aufgabe 1. Seien $\langle\cdot,\cdot\rangle_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, gegeben durch die Formeln

$$\langle x, y\rangle_1 = x_1y_1 + x_2y_2, \quad \langle x, y\rangle_2 = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2,$$

für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Natürlich ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ gerade das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

(1) Zeigen Sie: $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ ist auch ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

(2) Für $i = 1, 2$ und $x \in \mathbb{R}^2$ sei $\|x\|_i = \sqrt{\langle x, x\rangle_i}$ die zu $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$, $i = 1, 2$ zugehörige Norm, und es seien $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{R}^2$ die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 in der Ebene und berechnen Sie alle Längen $\|v_j\|_i$, $j = 1, \ldots, 5, i = 1, 2$.

(3) Berechnen Sie (auch mit Hilfe eines Taschenrechners) die Winkel $\sphericalangle(v_j, v_k)$ für $1 \le j, k \le 5$ bezüglich des Standard-Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$. Welche Vektoren stehen senkrecht aufeinander?

(4) Berechnen Sie nun die Winkel $\sphericalangle(v_j, v_k)$ für $1 \le j, k \le 5$ bezüglich des Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$. Welche Vektoren stehen jetzt senkrecht aufeinander?

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Für $\alpha \in (-\pi, \pi]$ sei $F_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die einen Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ um den Winkel α (entgegen den Uhrzeigersinn, wenn $\alpha > 0$) dreht.

(a) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $A_\alpha := A_\alpha^{\mathcal{S}}$ von F_α bezüglich der Standardbasis $\mathcal{S} = \{e_1, e_2\}$. (Hinweis: Identfizieren Sie $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ und betrachten Sie die Polarkoordinaten in $\mathbb{C}$!).

(b) Berechnen Sie für alle $\alpha \in (-\pi, \pi]$ die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von F_α. Für welche $\alpha \in (-\pi, \pi]$ ist F_α diagonalisierbar?

Aufgabe 2. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) und sei $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm gegeben durch $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt für alle $v, w \in V$: $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$.

(b) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so gilt für alle $v, w \in V$:

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\big(\|v + w\|^2 + i\|v + iw\|^2 - \|v - w\|^2 - i\|v - iw\|^2\big).$$

Das Skalarprodukt ist also in beiden Fällen eindeutig durch die zugehörige Norm festgelegt (vergleiche mit Bemerkung 3.8 der Vorlesung).

Aufgabe 3. (a) Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und sei $F : V \to V$ ein Automorphismus von V (ein Endomorphismus $F : V \to V$ heißt *Automorphismus*, wenn F auch ein Isomorphismus ist). Zeigen Sie: Dann wird durch

$$\langle v, w\rangle_F := \langle F(v), F(w)\rangle$$

ein weiteres Skalarprodukt auf V definiert.

(b) Zeigen Sie: Ist $F : V \to V$ ein surjektiver Endomorphismus mit $\|F(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$, so ist F ein Automorphismus und es gilt für alle $v, w \in V$ auch

$$\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

(c) Zeigen Sie: Die Drehungen $F_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aus Aufgabe 1 erfüllen alle die Gleichung

$$\langle F_\alpha(x), F_\alpha(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2,$$

wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Bezeichnung: Ist $F : V \to V$ ein Endomorphismus mit $\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$, so heißt F *orthogonal* (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. *unitär* (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Teil (c) der Aufgabe zeigt, dass z.B. alle Drehungen F_α des $\mathbb{R}^2$ orthogonal sind.

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{R}[T]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Polynome. Für $p, q \in \mathbb{R}[T]$ definieren wir

$$\langle p, q\rangle_I := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx.$$

Zeigen Sie, dass $\langle,\cdot,\cdot\rangle_I : \mathbb{R}[T] \times \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[T]$ ist.

Abgabe: Freitag, den 29.04.2016 um 8Uhr in den in der Übung genannten Abgabekästen.