# Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II, SoSe 2016, Blatt 10

## Mündliche Aufgaben

Zur Erinnerung: Ist $V$ ein $K$-Vektorraum und sind $V_1, \dots, V_r$ Untervektorräume von $V$, so sagen wir, $V$ ist die direkte Summe der $V_1, \dots, V_r$ (Schreibweise: $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$), wenn gelten

(1) Es gilt $V = \sum_{i=1}^r V_i := \{\sum_{i=1}^r v_i : v_i \in V_i \text{ für } 1 \leq i \leq r\}$.

(2) Für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ gilt $V_j \cap \sum_{i \neq j} V_i = \{0\}$.

Überlegen Sie sich (bzw. wiederholen Sie aus der LA I):

(1) Ist $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$, so besitzt jedes $v \in V$ eine **eindeutige** Zerlegung $v = \sum_{i=1}^r v_i$ mit $v_i \in V_i$ für $1 \leq i \leq r$.

(2) Ist $\mathcal{B}_i$ Basis von $V_i$ für $1 \leq i \leq r$, so ist $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$ eine Basis von $V$.

(3) Es gilt $\dim(V) = \sum_{i=1}^r \dim(V_i)$.

Sei nun $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$ und sei $F \in \mathrm{End}(V)$ mit $F(V_i) \subseteq V_i$ für alle $1 \leq i \leq r$. Dann wird für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ durch $F_i : V_i \to V_i; F_i(v) := F(v)$ ein Endomorphismus $F_i \in \mathrm{End}(V_i)$ definiert. Zeigen Sie:

(1) Es gilt dann $F\big(\sum_{i=1}^r v_i\big) = \sum_{i=1}^r F_i(v_i)$ für alle $v = \sum_{i=1}^r v_i$ mit $v_i \in V_i$ für alle $1 \leq i \leq r$. (Schreibweise: $F = \bigoplus_{i=1}^r F_i$).

(2) Es gelten $\mathrm{Kern}(F) = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Kern}(F_i)$ und $\mathrm{Bild}(F) = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Bild}(F_i)$.

## Schriftliche Aufgaben

**Aufgabe 1.** Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ heißt *schiefsymmetrisch* wenn $A^T = -A$ gilt. Zeigen Sie:

(1) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ schiefsymmetrisch, so ist $A$ normal und jeder Eigenwert von $A$ von der Form $i\beta$ für ein $\beta \in \mathbb{R}$.

(2) Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ schiefsymmetrisch, so existiert ein $k \leq \frac{n}{2}$ und eine orthogonale Matrix $O \in O(n)$, so dass $O^T A O$ die folgende Blockgestalt hat:

$$O^T A O = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad I_j = \begin{pmatrix} 0 & \beta_j \\ -\beta_j & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \text{ für } 1 \leq j \leq k.$$

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ eine Matrix $O \in O(3)$, so dass $O^T A O$ eine Blockgestalt hat wie in Aufgabe 1.

**Aufgabe 3.** Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und sei $F \in \operatorname{End}(V)$, so dass eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in $V$ existiert, so dass $A_F^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$ eine Matrix in Jordan-Normalform ist. Für ein $\lambda \in K$ und ein $k \in \mathbb{N}$ schreiben wir im folgenden

$$J(\lambda, k) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in M(k \times k, K)$$

für den $\lambda$-Jordan-Kasten der Länge $k$. Ferner schreiben wir für $\lambda \in K$ und $l \in \mathbb{N}$:

$$E_\lambda^l(F) := \operatorname{Kern}(F - \lambda \operatorname{id})^l.$$

Dann ist $E_\lambda^1(F)$ gerade der Eigenraum $E_\lambda(F)$ von $F$ zum Eigenwert $\lambda$. Zeigen Sie:

(1) $A_F^{\mathcal{B}}$ besitzt genau dann einen $\lambda$-Jordan-Kasten, wenn $\lambda$ ein Eigenwert von $F$ ist, und die Anzahl der $\lambda$-Jordan-Kästen in $A_F^{\mathcal{B}}$ ist gegeben durch $\dim(E_\lambda^1(F))$.

(2) Für jedes $l \in \mathbb{N}$ gilt: Die Anzahl der $\lambda$-Jordan-Kästen $J(\lambda, k)$ in $A_F^{\mathcal{B}}$ mit $k \geq l$ ist gegeben durch $\dim(E_\lambda^l(F)) - \dim(E_\lambda^{l-1}(F))$.

(3) Folgern Sie aus (1) und (2): Die Jordan-Normalform $A_F^{\mathcal{B}}$ von $F$ ist bis auf die Reihenfolge der Jordan-Kästen eindeutig durch den Endomorphismus $F$ festgelegt.

**Hinweis:** Betrachten Sie den "Beitrag" der einzelnen Jordan-Kästen an den Räumen $E_\lambda^l(F)$.

**Aufgabe 4.** Sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4; F(v) = B \cdot v$ mit $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_4\}$ von $\mathbb{R}^4$ existiert, so dass $A_F^{\mathcal{B}}$ in Jordan-Normalform ist, und berechnen Sie $A_F^{\mathcal{B}}$.

**Bemerkung:** Eine Basis $\mathcal{B}$ wie in der Aufgabe müssen Sie hierzu nicht explizit berechnen!

**Abgabe: Montag, den 27.06.2016 um 10Uhr in den in der Übung genannten Abgabekästen.**