Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II, SoSe 2016, Blatt 11

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4; F(v) = B \cdot v$ mit $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_4\}$ von $\mathbb{R}^4$, so dass $A_F^{\mathcal{B}}$ in Jordan-Normalform ist. Berechnen Sie dann eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$, so dass $S^{-1}BS$ in Jordan-Normalform ist.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Matrix $\exp(tB)$, $t \in \mathbb{C}$, für B wie in Aufgabe 1.

Aufgabe 3. (Der Satz von Cayley Hamilton) Ist $p(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$ ein Polynom und ist $A \in M(n \times n, K)$, so setzen wir

$$p(A) := \sum_{k=0}^{n} a_k A^k.$$

(a) Sei $A \in M(n \times n, K)$ so, dass das charakteristische Polynom χ_K über K in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie dann, dass $\chi_A(A) = 0$. (Das ist der Satz von Cayley-Hamilton.)
(b) Folgern Sie aus (a): Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ oder $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$, so gilt immer $\chi_A(A) = 0$.[1]

Aufgabe 4 (Minimalpolynom) Sei $A \in M(n \times n, K)$. Ein Polynom $p(T) = T^l + \sum_{k=0}^{l-1} a_k T^k$ heißt *Minimalpolynom* für A, wenn p ein normiertes Polynom kleinsten Grades mit $p(A) = 0$ ist. Genauer: Es gelten

(1) $p(A) = 0$, und
(2) Ist q ein beliebiges (normiertes) Polynom mit $\mathrm{grad}(q) < \mathrm{grad}(p)$, so gilt $q(A) \neq 0$.

Sei nun $K = \mathbb{C}$. **Beweisen Sie:** Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A und ist k_i, für $1 \leq i \leq r$, die Länge des größten Jordan-Kastens zum Eigenwert λ_i in der Jordan-Normalform J von A, so ist

$$p_A(T) = \prod_{i=1}^{r} (T - \lambda_i)^{k_i},$$

das eindeutig bestimmte Minimalpolynom für A.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $p_A(A) = 0$. Zeigen Sie dann, dass für jedes Polynom $q \in K[T]$ gilt: Ist $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix}$ die Jordan-Normalform von A, so gilt

$$q(A) = 0 \Longleftrightarrow q(J) = 0 \Longleftrightarrow q(J_i) = 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq l.$$

Überlegen Sie dann, dass für jedes Polynom $q \in K[T]$ mit $q(A) = 0$ jeder Eigenwert λ_i von A mindestens mit der algebraischen Vielfachheit k_i vorkommen muss. Benutzen Sie hierzu eine Zerlegung von q in Linearfaktoren.

[1] Die Aussagen in (b) gilt auch für Matrizen über beliebigen Körpern. Der Beweis folgt wie hier im Fall $K = \mathbb{R}$ wenn man einen Satz aus der Algebra benutzt, der besagt, dass sich jeder Körper K in einen algebraisch abgeschlossenen Körper L einbetten lässt (so wie $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$).

Aufgabe 5 (Freiwillige Zusatzaufgabe mit Extrapunkten!) Zeigen Sie, dass die Aussage von Aufgabe 4 auch für $K = \mathbb{R}$ gilt. (Überlegen Sie hierzu, dass das Polynom p_A in Aufgabe 4 reell ist, wenn A eine reelle Matrix ist, auch wenn die Eigenwerte λ_i komplex sein können.)

Abgabe: Montag, den 04.07.2016 um 10Uhr in den in der Übung genannten Abgabekästen.