Musterlösung für die Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS 2015/16, 16.04.2016

Vokabelbuch

In diesem Teil soll getestet werden, inwieweit Sie in der Lage sind, wichtige Definitionen und Sätze aus der Vorlesung korrekt zu formulieren bzw. zu interpretieren. Für jede richtig gelöste Teilaufgabe bekommen Sie einen Punkt. Sie können also in diesem Teil insgesamt 12 Punkte erwerben.

Aufgabe 1. Seien X und Y nichtleere endliche Mengen mit $|X| = n$ und $|Y| = m$, wobei $|B|$ für eine endliche Menge B die Anzahl der Elemente von B bezeichnet. Ferner sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Sei $n < m$. Welche der folgenden Aussagen sind **nicht möglich:**
[x] f ist surjektiv.
[ ] f ist injektiv.
[x] f ist bijektiv.
(Zutreffendes bitte ankreuzen.)

(b) Sei $\emptyset \neq A \subseteq X$ mit $|A| = l$. Welche der folgenden Aussagen sind **möglich:**
[ ] $|f(A)| = 0$.
[x] $|f(A)| < l$.
[x] $|f(A)| = l$.
[ ] $|f(A)| > l$.
(Zutreffendes bitte ankreuzen.)

Aufgabe 2. Sei $A \in M(m \times n, K)$ eine Matrix.

(a) Wie sind Kern(A) und Bild(A) definiert?

$$\mathrm{Kern}(A) = \{x \in K^n : Ax = 0\} \quad \mathrm{Bild}(A) = \{Ax : x \in K^n\}.$$

(b) Sei $b \in K^m$ und sei $x_0 \in K^n$ eine spezielle Lösung des LGS $Ax = b$. Geben Sie dann eine Formel für die allgemeine Lösung des LGS $Ax = b$ an.
Für die Lösungsmenge L der Gleichung $Ax = b$ gilt $L = x_0 + \mathrm{Kern}(A)$.

(c) Sei $\dim(\mathrm{Kern}(A)) = l$. Wie groß ist dann die Dimension von Bild(A)?
Es gilt $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = n - l$.

Aufgabe 3. Seien V und W endlich erzeugte K-Vektorräume und sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ferner seien $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \{w_1, \dots, w_m\}$ Basen von V und W.

(a) Geben Sie eine Formel für die Einträge der Darstellungsmatrix ${}^{\tilde{\mathcal{B}}}A_F^{\mathcal{B}}$ von F an.
Für die Einträge a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ der Matrix ${}^{\tilde{\mathcal{B}}}A_F^{\mathcal{B}}$ gilt die Formel

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i.$$

(b) Sei $\tilde{\tilde{\mathcal{B}}} = \{w_1', \dots, w_m'\}$ eine weitere Basis von W. Welche Beziehung besteht zwischen den Darstellungsmatrizen ${}^{\tilde{\mathcal{B}}}A_F^{\mathcal{B}}$ und ${}^{\tilde{\tilde{\mathcal{B}}}}A_F^{\mathcal{B}}$?
Es gilt ${}^{\tilde{\tilde{\mathcal{B}}}}A_F^{\mathcal{B}} = {}^{\tilde{\tilde{\mathcal{B}}}}A_{\mathrm{id}}^{\tilde{\mathcal{B}}} \cdot {}^{\tilde{\mathcal{B}}}A_F^{\mathcal{B}}$, wobei ${}^{\tilde{\tilde{\mathcal{B}}}}A_{\mathrm{id}}^{\tilde{\mathcal{B}}}$ die Basiswechselmatrix für den Wechsel von der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ zur Basis $\tilde{\tilde{\mathcal{B}}}$ bezeichnet.

Aufgabe 4. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

(a) Sei $w_1, \ldots, w_k$ ein System von linear unabhängigen Vektoren in V und sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Was besagt der Basisergänzungssatz für die Vektoren $w_1, \ldots, w_k$ und die Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$?

Der Satz sagt, dass wir die Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ so umordnen können, so dass nach der Umordnung das System $\{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ wieder eine Basis von V ist.

(b) Sei $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ein Erzeugendensystem von V und sei $v_0 \in V$ mit $v_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ für geeignete Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$. Was besagt das Austauschlemma für $\{v_1, \ldots, v_k\}$ und v_0?

Das Austauschlemma besagt folgendes: Ist $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\lambda_i \neq 0$, so ist auch $\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_0, v_{i+1}, \ldots, v_k\}$ wieder ein Erzeugendensystem für V.

In anderen Worten: ist $\lambda_i \neq 0$, so können wir im Erzeugendensystem $\{v_1, \ldots, v_k\}$ den Vektor v_i durch den Vektor v_0 ersetzen, und das dadurch entstandene neue System ist wieder ein Erzeugendensystem.

Aufgabe 5. Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine Matrix.

(a) Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

[x] $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Kern}(A) = \{0\}$.
[x] $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Bild}(A) = K^n$.
[x] $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist invertierbar.
[x] $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ Für jedes $b \in K^n$ ist die Gleichung $Ax = b$ eindeutig lösbar.
(Zutreffendes bitte ankreuzen.)

(b) Wann heißt die Matrix A diagonalisierbar?

A heißt diagonalisierbar, wenn eine invertierbae Matrix $S \in M(n \times n, K)$ existiert, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Formulieren Sie ein hinreichendes Kriterium für die Diagonalisierbarkeit von A mit Hilfe der Eigenwerte von A .

A ist diagonalisierbar, wenn A n paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt.

Rechnen

In den folgenden Aufgaben soll getestet werden, inwieweit Sie die in der Vorlesung besprochenen Rechenverfahren beherrschen. Bitte geben Sie nur die Ergebnisse und die wichtigsten Rechenschritte an. Sie können in diesem Teil insgesamt 17 Punkte erwerben.

Aufgabe 1. (3 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = -1$, $z \in \mathbb{C}$.

Die Lösungen sind: $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ und $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 1, \mathbb{R})$.

Berechnen Sie die Matrixprodukte AB und BA. Welche dieser Matrizen ist invertierbar?
Es gilt $AB = (14) \in M(1 \times 1, \mathbb{R})$. Da $14 \neq 0$ ist diese Matrix invertierbar mit Inverser Matrix $(\frac{1}{14})$.
Es gilt $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Diese Matrix ist nicht invertierbar, da z.B. $BA \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. (3 Punkte) Sei $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A_t invertierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse A_t^{-1}.

Lösung: Die Matrix ist genau dann invertierbar, wenn $t \neq 0$ gilt, und dann gilt

$$A_t^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{t}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{t} & -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgbabe 4. (3 Punkte) Berechnen Sie alle reellen Polynome $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ mit $\text{grad}(p) \leq 3$ und $p(0) = 1, p(1) = 2, p(-1) = 3$. Bestimmen Sie dafür zunächst ein LGS für die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 (bitte mit angeben!).

Lösung: Durch Einsetzen der Stützstellen erhalten wir das LGS $Ax = b$ für $x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

wenn a_0, a_1, a_2, a_3 die Koeffizienten der gesuchten Polynome sind. Die Allgemeine Lösung dieses LGS ist gegeben durch die Menge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Menge der gesuchten Polynome ist also gegeben durch

$$\{p(x) = 1 + (-\frac{1}{2} + \lambda)x + \frac{3}{2}x^2 - \lambda x^3 : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 5. (3 Punkte) Sei $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\det(A_x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist A_x invertierbar?

Lösung: Es gilt $\det(A_x) = -3 - x$. Damit ist $\det(A_x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ und A_x ist ganau dann invertierbar, wenn $x \neq -3$.

Aufgabe 6. (3 Punkte) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathrm{LH}\{\cos, \sin\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, und sei $F : V \to V$ der Endomorphismus $F(f) = f + 2f'$, wobei f' die Ableitung von f bezeichnet. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{\cos, \sin\}$ von V und untersuchen Sie F auf Diagonalisierbarkeit.

Lösung: Wegen $F(\cos) = \cos + 2\cos' = \cos - 2\sin$ und $F(\sin) = \sin + 2\sin' = \sin + 2\cos$ erhalten wir die Darstellungsmatrix $A_F^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom ist dann gegeben durch

$$\chi_F(\lambda) = \det(\lambda E_2 - A_F^{\mathcal{B}}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 4.$$

Dieses Polynom hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ und damit hat F keine reellen Eigenwerte. F ist daher nicht diagonalisierbar.

Beweisen

Aufgabe 1. (4 Punkte) Seien V und W zwei K-Vektorräume und sei $F : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung. Beweisen Sie: Ist $v_1, \dots, v_l$ ein System linear unabhängiger Vektoren in V, so ist $F(v_1), \dots, F(v_l)$ ein System linear unabhängiger Vektoren in W.

Beweis: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in K$ mit $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i F(v_i) = 0$. Wir müssen zeigen, dass dann $\lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0$ gilt. Das F linear ist, gilt $0 = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i F(v_i) = F\big(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i\big)$. Da F injektiv ist, ist $\mathrm{Kern}(F) = \{0\}$, woraus nun folgt, dass $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i = 0$ gilt. Da die Vektoren $v_1, \dots, v_l$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei $A \in M(n \times n, K)$ und sei $b \in K^n$, so dass das LGS $Ax = b$ eine eindeutige Lösung besitzt. Beweisen Sie: Dann ist A invertierbar.

Beweis: Ist x_0 eine spezielle Lösung der Gleichung $Ax = b$, so ist die Menge L aller Lösungen gegeben durch $L = \{x_0\} + \mathrm{Kern}(A)$. Nach Voraussetzung besitzt die Gleichung $Ax = b$ genau eine Lösung. Damit folgt $\{x_0\} + \mathrm{Kern}(A) = \{x_0\}$ und damit $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$. Eine quadratische Matrix ist aber genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$ gilt.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei V ein 5-dimensionaler K-Vektorraum und seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume von V mit $\dim_K(U) = \dim_K(W) = 3$. Beweisen Sie: Dann gilt $U \cap W \neq \{0\}$.

Beweis: Nach der Dimensionsformel für Summen von Vektorräumen gilt

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 6 - \dim(U \cap W).$$

Da $U + W \subseteq V$ und $\dim(V) = 5$ gilt $\dim(U + W) \leq 5$, und dann muss $\dim(U \cap W) \geq 1$ gelten. Damit ist $U \cap W$ nicht der Nullraum.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Es seien $A, B \in M(n \times n, K)$. Beweisen Sie: Es gilt

$$AB \text{ ist invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ und } B \text{ sind invertierbar.}$$

Beweis: Eine quadratische Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. Ferner gilt die Formel $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
& AB \text{ ist invertierbar} \\
\Leftrightarrow & \det(A)\det(B) = \det(AB) \neq 0 \\
\Leftrightarrow & \det(A) \neq 0 \wedge \det(B) \neq 0 \\
\Leftrightarrow & A \text{ und } B \text{ sind invertierbar.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. (4 Punkte) Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine quadratische Matrix und sei

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

die charakteristische Polynomfunktion von A. Zeigen Sie: Dann gilt $a_0 = (-1)^n \det(A)$.

Beweis: Für alle $\lambda \in K$ gilt $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E_n - A)$. Damit folgt für $\lambda = 0$:

$$\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A),$$

wobei die zweite Gleichung daraus folgt, dass wir jede Zeile der Matrix A mit -1 multiplizieren um die Matrix A zu erhalten, und bei Multiplikation einer Zeile mit dem Faktor -1 ändert sich die Determinante durch Multiplikation mit demselben Faktor.