Probeklausur zur Vorlesung Lineare Algebra I, WS 2015/16

Name: **Matrikelnr.:**

Die Klausur besteht aus 3 Teilen (Vokabelbuch, Rechnen, Beweisen). Sie haben diese Klausur bestanden, wenn Sie mindestens 21 der 51 möglichen Punkte erreicht haben wobei **mindestens 4 Punkte aus dem Teil mit den Beweisaufgaben (3. Teil) stammen müssen!**

Vokabelbuch

In diesem Teil soll getestet werden, inwieweit Sie in der Lage sind, wichtige Definitionen und Sätze aus der Vorlesung korrekt zu formulieren bzw. zu interpretieren. Für jede richtig gelöste Teilaufgabe bekommen Sie einen Punkt. Sie können also in diesem Teil insgesamt 14 Punkte erwerben.

Aufgabe 1. Zu Mengen und Abbildungen.

(1) Es seien X und Y Mengen. Wann heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ injektiv?

(2) Wann heißt eine Menge M endlich?

(3) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und sei $A \subseteq X$. Wie ist die Menge $f(A)$ definiert?

Aufgabe 2. Sei V ein K-Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$.

(1) Sei $n \geq 2$. Geben Sie ein Kriterium für die lineare Abhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$ an.

(2) Wann heißt V endlich erzeugt?

(3) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V?

Aufgabe 3. Seien V und W endlich erzeugte K-Vektorräume und sei $F : V \to W$ linear.

(1) Sei $V = K^n$, $W = K^m$. Geben Sie eine Formel für die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Standardbasen von K^n und K^m an.

(2) Definieren Sie Kern(F) und Bild(F).

(3) Wie lautet die Dimensionsformel für $F : V \to W$?

Aufgabe 4. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

(1) Seien $v_1, \ldots, v_k \in V$ linear unabhängig. Was besagt der Basisergänzungssatz für $v_1, \ldots, v_k$?

(2) Sei $F : V \to V$ linear. Welche Beziehungen bestehen zwischen den folgenden Aussagen:
   (a) F ist surjektiv.
   (b) F ist bijektiv.
   (c) $\mathrm{Kern}(F) = \{0\}$.

   Genauer: Welche der Implikationen (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$(3), (2)$\Rightarrow$(3), usw. sind erfüllt?

Aufgabe 5. Sei $A \in M(m \times n, K)$ eine Matrix.

(1) Wie ist der Rang von A definiert? Was ist der Zeilenrang und was ist der Spaltenrang von A?

(2) Wie ist die zu A gehörende lineare Abbildung $F_A : K^n \to K^m$ definiert?

(3) Sei $A \in M(m \times n, K)$ und $B \in M(l \times k, K)$. Unter welchen Bedingungen an m, n, l, k existieren die Matrixprodukte AB bzw. BA?

Rechnen

In den folgenden Aufgaben soll getestet werden, inwieweit Sie die in der Vorlesung besprochenen Rechenverfahren beherrschen. Bitte geben Sie nur die Ergebnisse (ohne Begründungen) an. Sie können in diesem Teil insgesamt 19 Punkte erwerben.

Aufgabe 1. (3 Punkte) Berechnen Sie alle vierten Wurzeln von $z = -4$, d.h., alle $w \in \mathbb{C}$ mit $w^4 = -4$, und schreiben Sie diese in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Berechnen Sie die inverse Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgbabe 3. (4 Punkte) Seien $A \in M(4 \times 3, \mathbb{R})$ und $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Lösungen der linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 4. (2 Punkte) Berechnen Sie eine Basis für $\operatorname{Bild}(A) \subseteq \mathbb{R}^4$ mit A wie in Aufgabe 2.

Aufgabe 5. (2 Punkte) Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ der Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ mit $v_1 = (1, 0, 1)^t$ und $v_2 = (0, 2, 2)^t$. Ferner seien $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
Berechnen Sie die Darstellungsmatrix ${}^{\mathcal{S}_2}A_F^{\mathcal{B}}$ der durch $F(v_1) = u_1$ und $F(v_2) = u_2$ festgelegten linearen Abbildung $F : V \to \mathbb{R}^2$, wobei $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ wie oben und $\mathcal{S}_2 = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ ist. Ist F invertierbar?

Aufgabe 6. (2 Punkte) Berechnen Sie den Zeilenrang und Spaltenrang der Matrix A aus Aufgabe 2.

Aufgabe 7. (2 Punkte) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix ${}^{\mathcal{S}_3}A_{\mathrm{id}}^{\mathcal{B}}$ wobei $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_2\}$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{S}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Aufgabe 8. (2 Punkte) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie eine Zerlegung von A in Elementarmatrizen.

Beweisen

In diesem Abschnitt sollen Sie einige Aussagen beweisen. Sie dürfen die Resultate der Vorlesung, aber nicht die der Übungen benutzen. Sie können in diesem Teil höchstens 18 Punkte erwerben. Zum Bestehen der Klausur müssen Sie mindestens 4 Punkte in diesem Bereich erzielen!

Aufgabe 1. (4 Punkte) Seien $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion nach n, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt: Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist $\binom{n}{k}$.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Beweisen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Aufgabe 3. (5 Punkte) Sei $X \neq \emptyset$ und sei $\mathcal{F}(X)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ (also $\mathcal{F}(X) = \mathrm{Abb}(X, \mathbb{R})$). Seien $x_1, \ldots, x_n \in X$ fest. Beweisen Sie:

(1) (1 Punkt) Die Abbildung $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n; \mathcal{F}(f) = (f(x_1), \ldots, f(x_n))^t$ ist linear.

(2) (2 Punkte) Die Abbildung $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ aus (1) ist genau dann surjektiv, wenn die Elemente $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschieden sind, d.h. für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.

(3) (2 Punkte) Sind $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, so gilt:

$$F(f_1), \ldots F(f_k) \quad \text{linear unabhängig in } \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad f_1, \ldots, f_k \quad \text{linear unabhängig.}$$

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei $\mathbb{R}_3[T]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 und sei $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für jedes reelle Polynom $p(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$ sei $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f_p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
Beweisen Sie, dass $F : \mathbb{R}_3[T] \to \mathcal{F}(\mathbb{R}); F(p) = f_p$ eine injektive lineare Abbildung ist.

Aufgabe 5. (3 Punkte) Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Beweisen Sie: Sind $v_1, \ldots, v_k \in V$ mit $k > n$, so sind die $v_1, \ldots, v_k$ linear abhängig.