Aufgabe 1

Teil Vokabelbuch

(1) Die Abbildung $f: X \to Y$ heißt injektiv, wenn für alle $x_0, x_1 \in X$ gilt, dass aus $f(x_0) = f(x_1)$ schon $x_0 = x_1$ folgt.

Als Formel:

$$f \text{ injektiv } :\Longleftrightarrow \forall x_0, x_1 \in X: \left(f(x_0) = f(x_1) \Rightarrow x_0 = x_1 \right)$$

(2) Die Menge M heißt endlich, falls sie leer ist, oder falls $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion von M nach $\{1, 2, \dots, n\}$ existiert.

Als Formel:

$$M \text{ endlich } :\Longleftrightarrow M = \emptyset \vee \exists n \in \mathbb{N} \; \underset{\text{bijektiv}}{\exists f: M \to \{1, \dots, n\}}$$

(3) Die Menge $f(A)$ ist definiert als:

$$f(A) := \{ f(x) : x \in A \}.$$

Aufgabe 2

(1) Die Vektoren $v_1, -, v_n \in V$ heißen linear unabhängig, falls für alle $\lambda_1, -, \lambda_n \in K$ aus $\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0$ schon $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ folgt.

Als Formel:

$v_1, -, v_n$ linear unabhängig

$$:\Leftrightarrow \forall \lambda_1, -, \lambda_n \in K : \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = - = \lambda_n = 0 \right)$$

(2) Der Vektorraum V heißt endlich erzeugt, falls es ein endliches Erzeugendensystem von V gibt, d.h., falls es $n \in \mathbb{N}$ und Vektoren $v_1, -, v_n \in V$ gibt, so dass $V = LH\{v_1, -, v_n\}$.

Als Formel:

$$V \text{ endlich erzeugt } :\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists v_1, -, v_n \in V : V = LH\{v_1, -, v_n\}$$

(3) Die Menge $\{v_1, -, v_n\}$ heißt Basis von V, falls $v_1, -, v_n$ linear unabhängig sind und falls $\{v_1, -, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist.

Als Formel:

$\{v_1, -, v_n\}$ Basis von V

$$:\Leftrightarrow v_1, -, v_n \text{ linear unabh. } \wedge V = LH\{v_1, -, v_n\}.$$

Aufgabe 3

(1) Die Darstellungsmatrix A_F von F bezüglich der Standarbasen von K^n und K^m ist die Matrix $A_F = (a_{\ell,k})_{\substack{\ell=1,..,m \\ k=1,..,n}}$ die dadurch eindeutig bestimmt ist, dass für alle $k \in \{1,..,n\}$ gilt:

$$F(e_k) = \sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell,k} \cdot e_\ell .$$

D.h., $A_F = (F(e_1),..,F(e_n))$.

(2) Es gilt:

$$\mathrm{Kern}(F) = \{ v \in V : F(v) = 0 \}$$

$$\mathrm{Bild}(F) = \{ F(v) : v \in V \}$$

(3) Die Dimensionsformel für $F: V \to W$ lautet:

$$\dim_K(V) = \dim_K(\mathrm{Kern}(F)) + \dim_K(\mathrm{Bild}(F)).$$

Aufgabe 4

(1) Der Basisergänzungssatz für $v_1, \ldots, v_k$ besagt:
Ist $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von V, dann gilt $k \leq n$ und es gibt eine Umnummerierung von $\{w_1, \ldots, w_n\}$, so dass nach der Umsortierung das System $\{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n\}$ eine Basis von V ist.

(2) Alle drei Aussagen sind äquivalent, d.h. es gilt: (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c).

Aufgabe 5

(1) Der Rang von $A \in M(m \times n, K)$ ist definiert als:

$$\text{Rang}(A) := \dim_K(\text{Bild}(A)).$$

Der Zeilenrang von A ist die Dimension des Vektorraums, der von den Zeilenvektoren von A aufgespannt wird. Analog ist der Spaltenrang von A die Dimension des Vektorraums, der von den Spaltenvektoren von A aufgespannt wird.

(2) Die Abbildung $F_A : K^n \to K^m$ ist definiert durch:

$$F_A(x) = A \cdot x$$

für alle $x \in K^n$.

(3) Das Matrixprodukt AB existiert, falls $n = l$.
Das Matrixprodukt BA existiert, falls $k = m$.

Teil Rechnen

Aufgabe 1:

$1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$

Aufgabe 2:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

$$\mathrm{Kern}(A) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$Ax = b_1 \iff x \in \mathrm{Kern}(A)$.

$Ax = b_2 \iff x \in \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathrm{Kern}(A)$.

$Ax = b_3$ hat keine Lösung.

Aufgabe 4:

Eine Basis für Bild(A) mit A wie in Aufgabe 2 ist:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 5:

$$ {}^{S_2}A^{B}_{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. $$

F ist invertierbar.

Aufgabe 6:

Der Zeilen- und Spaltenrang von A aus Aufgabe 3 ist jeweils 2.

Aufgabe 7:

$$ {}^{S_3}A^{B}_{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. $$

Aufgabe 8:

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} $$

Teil Beweisen

Aufgabe 1:

Induktionsanfang: $n=1$.

Die 0-elementigen Teilmengen von $\{1\}$ sind $\emptyset$, und es gilt auch $\binom{1}{0}=1$.

Analog gibt es nur eine 1-elementige Teilmenge von $\{1\}$, nämlich $\{1\}$, und es gilt auch $\binom{1}{1}=1$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$.

Sei M die Menge der k-elementigen Teilmengen von $\{1,\dots,n+1\}$. Wir definieren

$$M_0 := \{S \in M : n+1 \notin S\},$$
$$M_1 := \{S \in M : n+1 \in S\}.$$

Wir haben eine Bijektion zwischen M_0 und der Menge der k-elementigen Teilmengen von $\{1,\dots,n\}$ indem wir $S \in M_0$ auf $S \cap \{1,\dots,n\}$ abbilden. Nach Induktionsvorraussetzung hat M_0 genau $\binom{n}{k}$ Elemente.

Im Fall $K=0$ gilt natürlich $M = \{\emptyset\}$,
und $\{1,..,n+1\}$ hat genau eine (nämlich $\emptyset$) 0-elementige Teilmenge und es gilt auch $\binom{n+1}{0} = 1$.

Im Fall $K \geq 1$ gibt es eine Bijektion zwischen M_1 und der Menge der $(K-1)$-elementigen Teilmengen von $\{1,..,n\}$ indem wir $S \in M_1$ auf $S \cap \{1,..,n\}$ abbilden. Nach Induktionsvorraussetzung folgt, dass M_1 genau $\binom{n}{K-1}$ Elemente hat.

Insgesamt hat M daher $\binom{n}{K} + \binom{n}{K-1}$ Elemente.
Wir haben $\binom{n}{K} + \binom{n}{K-1} = \binom{n+1}{K}$. Daher hat $\{1,..,n+1\}$ genau $\binom{n+1}{K}$ verschiedene K-elementige Teilmengen.

Aufgabe 2:

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $z = a + bi$. Dann gilt $\bar{z} = a - bi$ und daher:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Es gilt $a^2 + b^2 = |z|^2$, und daher $z \cdot \bar{z} = 1$.

Somit ist $\bar{z}$ das multiplikative Inverse von z, d.h., $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Aufgabe 3:

(1) Seien $f, g \in \mathcal{F}(X)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(f+\lambda\cdot g) &= ((f+\lambda\cdot g)(x_1), \dots, (f+\lambda\cdot g)(x_n))^t \\ &= (f(x_1)+\lambda\cdot g(x_1), \dots, f(x_n)+\lambda g(x_n))^t \\ &= (f(x_1), \dots, f(x_n)) + \lambda\cdot(g(x_1), \dots, g(x_n))^t \\ &= F(f) + \lambda\cdot F(g). \end{aligned}$$

(2)

„$\Rightarrow$": Angenommen $x_i = x_j$ für $i \neq j$. Wir zeigen, dass dann F nicht surjektiv ist. In der Tat gilt dann für alle $y \in \text{Bild}(F)$, dass der i-te und j-te Eintrag von y gleich sind. Insbesondere ist der i-te Einheitsvektor ($e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$) nicht im Bild von F

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ i \end{array}$$

und somit F nicht surjektiv.

„$\Leftarrow$": Angenommen $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Um zu zeigen, dass dann F surjektiv ist, sei $y \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

Es sei $f: X \to \mathbb{R}$ die Abbildung, die x_i auf y_i abbildet, für $i = 1, \dots, n$, und die alle $x \in X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ auf 0 abbildet. Dann gilt $F(f) = y$ nach Konstruktion, und somit ist $y \in \text{Bild}(F)$ und daher F surjektiv.

(3) Angenommen, $F(f_1), \dots, F(f_k)$ sind lin. unabh. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, so dass $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = 0$.

Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
0 &= F(0) \\
&= F\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i\right) \\
&\overset{F \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F(f_i).
\end{aligned}
$$

Da $F(f_1), \dots, F(f_k)$ lin. unabh. sind, folgt $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Dies zeigt, dass $f_1, \dots, f_k$ lin. unabh. sind.

Aufgabe 4:

Seien $p, q \in \mathbb{R}_3[T]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Seien $a_0, \dots, a_3$ und $b_0, \dots, b_3$ so, dass $p(T) = \sum_{k=0}^{3} a_k T^k$ und $q(T) = \sum_{k=0}^{3} b_k T^k$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(p + \lambda q)(x) &= F\left(\sum_{k=0}^{3} (a_k + \lambda b_k) T^k\right)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{3} (a_k + \lambda b_k) \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^{3} a_k x^k + \lambda \sum_{k=0}^{3} b_k x^k \\ &= F(p)(x) + \lambda \cdot F(q)(x). \end{aligned}$$

Es folgt $F(p + \lambda q) = F(p) + \lambda \cdot F(q)$, d.h., F ist linear.

Um zu zeigen, dass F injektiv ist, sei $p \in \mathbb{R}_3[T]$ mit $F(p) = 0$. Seien $a_0, \dots, a_3$, so dass $p(T) = \sum_{k=0}^{3} a_k T^k$.

Für $x = 0$ gilt:

$$0 = F(p)(0) = \sum_{k=0}^{3} a_k 0^k = a_0.$$

Also gilt $a_0 = 0$.

Für $x=1$ und $x=-1$ gilt:

$$0 = F(p)(1) = \sum_{k=0}^{3} a_k 1^k = a_1 + a_2 + a_3 .$$

$$0 = F(p)(-1) = \sum_{k=0}^{3} a_k (-1)^k = -a_1 + a_2 - a_3 .$$

Es folgt $a_2 = 0$ und $a_1 + a_3 = 0$.

Für $x = 2$ gilt:

$$0 = F(p)(2) = \sum_{k=0}^{3} a_k 2^k = 2a_1 + 8a_3 .$$

Es folgt $a_1 = a_3 = 0$ und daher $p = 0$.

Aufgabe 5:

Angenommen, $v_1, \dots, v_k$ sind nicht linear abhängig, also linear unabhängig. Da V n-dimensional ist, gibt es eine Basis von V mit n Elementen: $\{w_1, \dots, w_n\}$. Nach dem Basisergänzungssatz gilt $k \leq n$. Dieser Widerspruch (zu $k > n$) zeigt, dass $v_1, \dots, v_k$ nicht linear unabhängig sind. D.h. $v_1, \dots, v_k$ sind sind linear abhängig.