Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren WS2018/19
Siegfried Echterhoff
Blatt 3

Aufgabe 1 Sei A eine unitale Banachalgebra A mit Norm $\|\cdot\|$ und sei $\lambda : A \to \mathcal{L}(A)$ die linksreguläre Darstellung von A wie in Blatt 1, Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(1) $\lambda : A \to \mathcal{L}(A)$ ist injektiv.

(2) Das Bild $\lambda(A) = \{\lambda(a) : a \in A\}$ ist abgeschlossen in $\mathcal{L}(A)$.

(3) Definieren wir $\|a\|_1 := \|\lambda(a)\|_{op}$ für alle $a \in A$, so ist $\|\cdot\|_1$ eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Banachalgebra-Norm auf A mit $\|1_A\|_1 = 1$.

Aufgabe 2. Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\delta : X \to \widehat{C(X)}; x \mapsto \delta_x,$$

mit $\delta_x(f) = f(x)$, ein Homöomorphismus ist. Zeigen Sie dann, dass vermöge der Identifizierung $X \cong \widehat{C(X)}$ die Gelfand-Transformation die Identität auf $C(X)$ ist.
(Hinweis: Der einzige Knackpunkt ist der Beweis der Surjektivität von δ. Nutzen Sie hierzu Satz 4.13 der Vorlesung)

Aufgabe 3. (a) Sei $l^1(\mathbb{Z})$ versehen mit der Faltung und mit $\|\cdot\|_1$ wie in Blatt 2, Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jedes $z \in \mathbb{T}$ ein Element $\varphi_z \in \widehat{l^1(\mathbb{Z})}$ definiert mit

$$\varphi_z(f) = \widehat{f}(z) \quad \Big(= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) z^n \Big),$$

und dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{T} \to \widehat{l^1(\mathbb{Z})}; z \mapsto \varphi_z$ ein Homöomorphismus ist.
Hinweis: Betrachten Sie $z := \chi(\mathrm{id}_{\mathbb{T}})$ für $\chi \in \widehat{\ell^1(\mathbb{Z})}$.
(b) Beweisen Sie: Ein Element $f \in l^1(\mathbb{Z})$ ist genau dann invertierbar in $l^1(\mathbb{Z})$, wenn $\widehat{f}(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{T}$ gilt. Zeigen Sie ferner, dass für alle $f \in l^1(\mathbb{Z})$ die Gleichung $\sigma(f) = \widehat{f}(\mathbb{T})$ gilt.

Aufgabe 4 Sei A die Diskalgebra aus Blatt2, Aufgabe 1. Berechnen Sie den Raum $\widehat{A}$ und beschreiben Sie die Gelfand-Transformation für A. Genauer: Zeigen Sie, dass die Abbildung $\delta : D \to \widehat{A}; z \mapsto \delta_z(f) := f(z)$ ein Homöomorphismus ist.
Hinweis: Der schwierigste Schritt ist zu zeigen, dass $\delta : D \to \widehat{A}$ surjektiv ist. Betrachten Sie dazu $z := \chi(\mathrm{id}_D) \in \mathbb{C}$ für $\chi \in \widehat{A}$.

Abgabe: Dienstag, den 30.10.2018 um 10Uhr in Kasten 152.