Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren WS2018/19
Siegfried Echterhoff
Blatt 4

Aufgabe 1. Finden Sie ein Beispiel für eine C*-Algebra A und ein Element $a \in A$ mit $\|a\| = 1$ und $\sigma(a) = \{0\}$. (Die Gleichung $\|a\| = \rho(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$ gilt also definitiv nicht für alle $a \in A$!)

Mündliche Aufgabe: Recherchieren Sie (etwa im Internet) die Begriffe einer (mathematischen) Kategorie, eines kovarianten oder kontravarianten Funktors zwischen zwei Kategorien, einer natürlichen Transformation (bzw. Äquivalenz) zwischen Funktoren, sowie einer Äquivalenz zwischen zwei Kategorien.

Aufgabe 2. (zählt doppelt) Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie deren Objekte unitale kommutative C*-Algebren sind mit der Morphismenmenge

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) := \{\Phi : A \to B : \Phi \text{ ist unitaler } *\text{-Homomorphismus}\}, \quad \text{für } A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}).$$

für Ferner sei $\mathcal{K}$ die Kategorie deren Objekte kompakte Hausdorff-Räume sind mit den Morphismenmengen

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(X, Y) := \{f : X \to Y : f \text{ stetig}\}, \quad \text{für } X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K}).$$

Zeigen Sie:

(1) Ist $\Phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ so wird durch $\Phi^* : \widehat{B} \to \widehat{A}; \Phi^*(\chi) := \chi \circ \Phi$ ein Element $\Phi^* \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(\widehat{B}, \widehat{A})$ definiert und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{K}$ mit $F(A) := \widehat{A}$ für $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $F(\Phi) := \Phi^*$ für $\Phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ist ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{K}$.

(2) Ist $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ so wird durch $\varphi^* : C(Y) \to C(X); \varphi^*(f) := f \circ \varphi$ ein Element in $\mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(C(Y), C(X))$ definiert und $G : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ mit $G(X) := C(X)$ für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ und $G(\varphi) := \varphi^*$ für $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ ist ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{C}$.

(3) Zeigen Sie, dass die Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{K}$ und $G : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ Äquivalenzen sind.

Aufgabe 3. Sei A eine C^*-algebra und sei $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ (mit $f(0) = 0$, falls A nicht unital). Zeigen Sie: Ist dann $a \in A$ normal mit $\sigma(a) \subseteq U_R(z_0)$, so gilt

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (a - z_0 1)^n,$$

wobei $f(a)$ durch Anwendung des Funktionalkalküls auf die stetige Funktion $f \in C(\sigma(a))$ definiert ist.

Abgabe: Dienstag, den 13.11.2018 um 10Uhr.